14 円に内接する四角形

P.33

〔練習問題〕

1 (1)①$\angle x=180^\circ-105^\circ=\mathbf{75^\circ}$

②$\angle x=\angle \mathrm{DCE}=\mathbf{120^\circ}$

③$\angle x=\angle \mathrm{ABC}=\mathbf{110^\circ}$

④$\angle \mathrm{BAD}=180^\circ-(50^\circ+46^\circ)=84^\circ$ より，$\angle x=180^\circ-84^\circ=\mathbf{96^\circ}$

⑤$\angle \mathrm{ADC}=180^\circ-97^\circ=83^\circ$　よって，$\angle x=180^\circ-(40^\circ+83^\circ)=\mathbf{57^\circ}$

⑥$\angle \mathrm{DCE}=\angle \mathrm{BAD}=70^\circ$ より，$\angle x=180^\circ-(70^\circ+36^\circ)=\mathbf{74^\circ}$

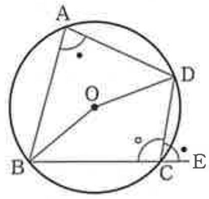
(2)円に内接する四角形において，対角の和は 180° だから，$\angle \mathrm{BAD}+\underline{\mathbf{\angle BCD}}=180^\circ$

これより，$\angle \mathrm{BAD}=180^\circ-\underline{\mathbf{\angle BCD}}$

また，$\angle \mathrm{DCE}+\angle \mathrm{BCD}=\underline{\mathbf{180^\circ}}$ だから，$\angle \mathrm{DCE}=\underline{\mathbf{180^\circ}}-\angle \mathrm{BCD}$

よって，$\angle \mathrm{DCE}=\angle \mathrm{BAD}$

したがって，外角はそれと隣り合う内角の**対角**に等しい。



(3)点 P，Q を結ぶと，四角形 ACQP は円に内接するから，

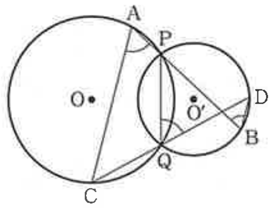
$\angle \mathrm{CAP}=\angle \mathrm{PQD}$　……①

円 O′ で，$\overset{\frown}{\mathrm{PD}}$ に対する円周角より，

$\angle \mathrm{PQD}=\angle \mathrm{PBD}$　……②

①，②より，$\angle \mathrm{CAP}=\angle \mathrm{PBD}$

よって，錯角が等しいから，AC // DB



2 (1)①$\angle \mathrm{B}+\angle \mathrm{D}=70^\circ+130^\circ=200^\circ\neq180^\circ$ より，円に**内接しない。**

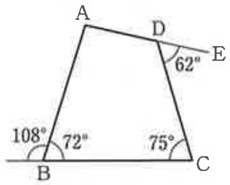
②$\angle \mathrm{B}=180^\circ-(63^\circ+35^\circ)=82^\circ$ だから，$\angle \mathrm{B}+\angle \mathrm{D}=82^\circ+98^\circ=180^\circ$

よって，円に**内接する。**

③$\angle \mathrm{ABC}=180^\circ-108^\circ=72^\circ$

AD の延長上に図のように点 E をとると，$\angle \mathrm{ABC}\neq\angle \mathrm{CDE}$

よって，円に**内接しない。**

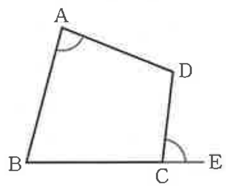


(2)右の図において，$\angle \mathrm{DCE}=\angle \mathrm{BAD}$　……①とする。

BE は直線だから，$\angle \mathrm{DCE}+\underline{\mathbf{\angle BCD}}=180^\circ$　……②

①，②より，$\angle \mathrm{BAD}+\angle \mathrm{BCD}=\underline{\mathbf{180^\circ}}$

1 組の**対角**の和が 180° だから，四角形 ABCD は円に内接する。



(3)AB // DC より，同位角は等しいから，

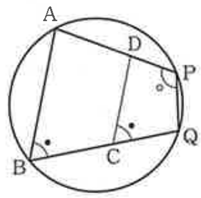
$\angle \mathrm{ABQ}=\angle \mathrm{DCQ}$　……①

四角形 ABQP は円に内接するから，

$\angle \mathrm{ABQ}+\angle \mathrm{DPQ}=180^\circ$　……②

①，②より，$\angle \mathrm{DCQ}+\angle \mathrm{DPQ}=180^\circ$

1 組の対角の和が 180° だから，四角形 DCQP は円に内接する。



15 円と直線

P.35

〔練習問題〕

1 (1)$AQ=AR=4$ より，$CP=CQ=AC-AQ=11-4=7$

よって，$x=BP=BC-CP=10-7=\mathbf{3}$

(2)$BP=BR=8$ より，$CQ=CP=BC-BP=14-8=6$

また，$AQ=AR=3$

よって，$x=AQ+CQ=3+6=\mathbf{9}$

(3)$AR=AQ=x$ より，$BP=BR=AB-AR=8-x$

また，$CP=CQ=AC-AQ=13-x$

$BP+CP=11$ より，$(8-x)+(13-x)=11$，$2x=10$，$\boldsymbol{x=5}$

2 (1)①接弦定理より，$\angle x=\angle ACB=\mathbf{40^\circ}$

②図 1 のように直線 AT 上に点 T′ をとると，接弦定理より，$\angle x=\angle CAT'=\mathbf{48^\circ}$

③接弦定理より，$\angle ACB=\angle BAT=65^\circ$

よって，$\angle x=180^\circ-(65^\circ+55^\circ)=\mathbf{60^\circ}$

④接弦定理より，$\angle ACB=\angle BAT=72^\circ$

また，BC は円の直径だから，$\angle BAC=90^\circ$

よって，$\angle x=180^\circ-(72^\circ+90^\circ)=\mathbf{18^\circ}$

⑤円 O の周上に，図 2 のように点 C をとると，

接弦定理より，$\angle ACB=\angle BAT=50^\circ$

よって，$\overset{\frown}{AB}$ に対する中心角より，$\angle x=2\times50^\circ=\mathbf{100^\circ}$

⑥図 3 のように直線 AT 上に点 T′ をとると，

接弦定理より，$\angle DBA=\angle DAT'=45^\circ$

四角形 ABCD は円に内接しているから，$\angle ADC+\angle ABC=180^\circ$

よって，$\angle x+45^\circ+100^\circ=180^\circ$

これを解いて，$\boldsymbol{\angle x=35^\circ}$

(2)$AB\perp AT$ より，線分 AB は円 O の**直径**である。

よって，$\angle ACB=\mathbf{90^\circ}$

したがって，$\angle BAT=\boldsymbol{\angle ACB}$

(3)直径 AD を引くと，$\angle ACD=90^\circ$ より，

$\angle ACB=90^\circ+\angle BCD$ ……①

$AD\perp AT$ より，$\angle BAT=90^\circ+\boldsymbol{\angle BAD}$ ……②

$\overset{\frown}{BD}$ に対する円周角だから，$\boldsymbol{\angle BCD}=\angle BAD$ ……③

①，②，③より，$\angle BAT=\boldsymbol{\angle ACB}$

図 1

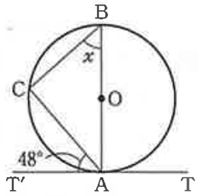


図 2

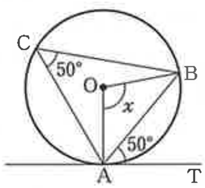
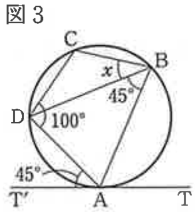
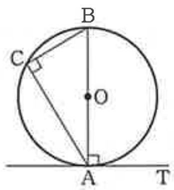


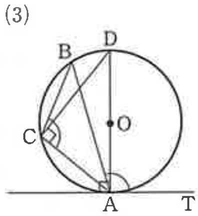
図 3



(2)



(3)



16 方べきの定理・２円の位置関係

P.37

〔練習問題〕

1 (1)方べきの定理 PA・PB＝PC・PD を用いる。

①$x\times4=8\times2$ より，$4x=16$，$\boldsymbol{x=4}$

②$8\times9=6\times x$ より，$6x=72$，$\boldsymbol{x=12}$

③$6\times6=x\times9$ より，$9x=36$，$\boldsymbol{x=4}$

④$6\times(6+2)=4\times(4+x)$ より，$4x+16=48$，$4x=32$，$\boldsymbol{x=8}$

⑤$6\times(6+x)=5\times(5+7)$ より，$6x+36=60$，$6x=24$，$\boldsymbol{x=4}$

⑥$8\times(8+x)=6\times(6+18)$ より，$8x+64=144$，$8x=80$，$\boldsymbol{x=10}$

(2)方べきの定理 $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$ を用いる。

①$4\times(4+x)=8^2$ より，$4x+16=64$，$4x=48$，$\boldsymbol{x=12}$

②$1\times(1+x)=2^2$ より，$x+1=4$，$\boldsymbol{x=3}$

③$2\times(2+6)=x^2$ より，$x^2=16$　$x>0$ より，$\boldsymbol{x=4}$

2 PA・PB＝PC・**PD** より，PA：**PD**＝PC：PB

また，∠APC＝**∠DPB** だから，△PAC∽△PDB

よって，**∠ACP**＝∠DBP　……①

したがって，4 点 A，B，C，D は同一円周上にある。

※①から結論を言うのに，図 1 では「円周角の定理の逆」を，図 2 では「四角形が円に内接するための条件」を，それぞれ根拠に用いている。

図 1

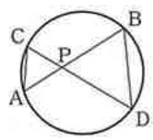
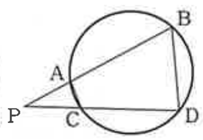


図 2



3 (1)円 O の半径を r，円 O′ の半径を r' とする。

①$d=14$ のとき，$d=r+r'$ が成り立つから，**外接する。**

共通接線は，**3 本**

②$d=3$ のとき，$d<r-r'$ が成り立つから，**円 O′ が円 O の内部にある。**

共通接線は，**0 本**

③$d=4$ のとき，$d=r-r'$ が成り立つから，**内接する。**

共通接線は，**1 本**

④$d=12$ のとき，$r-r'<d<r+r'$ が成り立つから，**2 点で交わる。**

共通接線は，**2 本**

(2)点 O′ から直線 OA に引いた垂線と OA の交点を H とする。

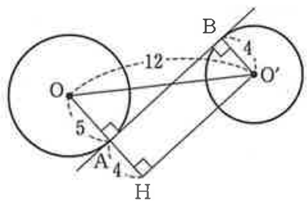
①右の図において，AH＝BO′＝4 だから，OH＝5＋4＝9

∠OHO′＝90° より，△OHO′ に三平方の定理を用いて，

$\mathrm{OH}^2+\mathrm{HO'}^2=\mathrm{OO'}^2$，$9^2+\mathrm{HO'}^2=12^2$，$\mathrm{HO'}^2=63$

$\mathrm{HO'}>0$ より，$\mathrm{HO'}=3\sqrt{7}$

よって，AB＝HO′＝$\boldsymbol{3\sqrt{7}}$



②右の図において，AH＝BO′＝3 だから，OH＝4−3＝1

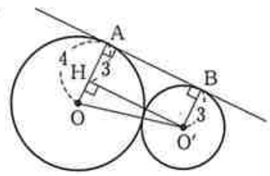
円 O と円 O′ は外接しているので，OO′＝4＋3＝7

∠OHO′＝90° より，△OHO′ に三平方の定理を用いて，

$\mathrm{OH}^2+\mathrm{HO'}^2=\mathrm{OO'}^2$，$1^2+\mathrm{HO'}^2=7^2$，$\mathrm{HO'}^2=48$

$\mathrm{HO'}>0$ より，$\mathrm{HO'}=4\sqrt{3}$

よって，AB＝HO′＝$\boldsymbol{4\sqrt{3}}$



17 作図

P.39

〔練習問題〕

1 (1)①半直線 AX を引き，AX 上に点 A から等間隔に点 Q_1，Q_2，Q_3，Q_4，Q_5 をとる。

②点 Q_2 を通り，直線 Q_5B に平行な直線を引き，線分 AB との交点を P とする。

このとき，点 P が線分 AB を 2：3 に内分する点である。(図 1)

(2)①半直線 AX を引き，AX 上に点 A から等間隔に点 Q_1，Q_2，Q_3，Q_4，Q_5 をとる。

②点 Q_5 を通り，直線 Q_4B に平行な直線を引き，半直線 AB との交点を P とする。

このとき，点 P が線分 AB を 5：1 に外分する点である。(図 2)

(3)①直線 AX を引き，点 A の両側に等間隔に点 R_1，Q_1，Q_2，Q_3 をとる。

②点 R_1 を通り，直線 Q_3B に平行な直線を引き，半直線 BA との交点を P とする。

このとき，点 P が線分 AB を 1：4 に外分する点である。(図 3)

図 1

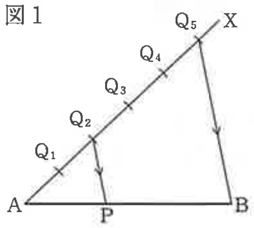


図 2

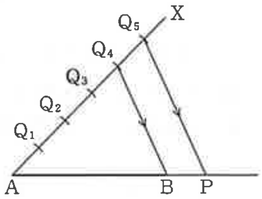
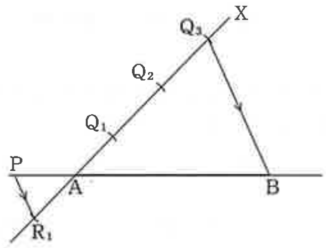


図 3



2 (1)①図 1 のように，直線 AB と異なる半直線 AX を引く。

②半直線 AX 上に点 C と D を，$AC=\sqrt{2}$，$CD=\sqrt{3}$ となるようにとる。

③点 D を通り，直線 CB に平行な直線を引き，直線 AB との交点を P とする。

このとき，BP が長さ $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ の線分である。

(2)①図 2 のように，半直線 AB 上に点 C を，$BC=\sqrt{5}$ となるようにとる。

②直線 AB と異なる半直線 AX を引き，AX 上に点 D を，$AD=\sqrt{2}$ となるようにとる。

③点 C を通り，直線 BD に平行な直線を引き，半直線 AX との交点を P とする。

このとき，DP が長さ $\sqrt{10}$ の線分である。

図 1

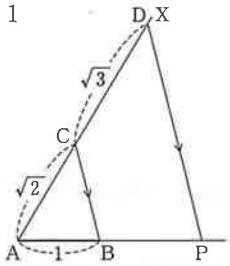
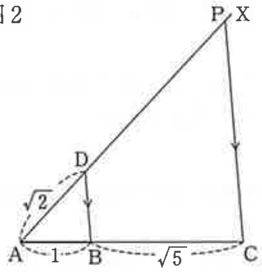


図 2



3 (1)①図 1 のように，半直線 AB 上に点 C を，$BC=6$ となるようにとる。

②線分 AC を直径とする半円 O をかく。

③点 B を通り，直線 AB に垂直な直線を引き，半円との交点を P とする。

このとき，BP が長さ $\sqrt{6}$ の線分である。

(2)①図 2 のように，半直線 AB 上に点 C を，$BC=\dfrac{1}{2}$ となるようにとる。

②線分 AC を直径とする半円 O をかく。

③点 B を通り，直線 AB に垂直な直線を引き，半円との交点を P とする。

このとき，BP が長さ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の線分である。

図 1

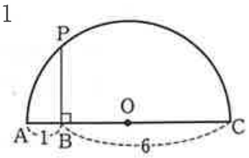
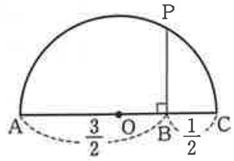


図 2



18 空間図形

P.41

〔練習問題〕

1 (1)①平行…辺 DE　垂直…辺 AD，BE，CF　ねじれの位置…辺 CF，DF，EF

②平行…辺 AD，EH，FG　垂直…辺 AI，IF，DJ，JG，AE，EF，DH，HG　ねじれの位置…辺 AE，EF，DH，HG

(2)①辺 IJ を平行移動させると辺 AF と重なるから，∠BAF の大きさを求めればよい。

ここで底面の正六角形の 1 つの内角は，$180°\times(6-2)\div6=120°$ であるから，∠BAF＝120°

よって，AB と IJ のなす角は，$\theta=180°-120°=$**60°**

②線分 AF を平行移動させると線分 IJ と重なるから，∠DIJ の大きさを求めればよい。

△DIJ において，IJ＝1，DJ＝$\sqrt{3}$，∠DJI＝90° より，∠DIJ＝60°

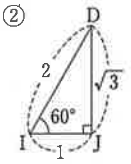
よって，AF と DI のなす角は，**$\theta=60°$**

③線分 KI を平行移動させると線分 FB と重なるから，∠ABF の大きさを求めればよい。

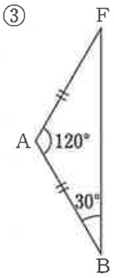
△ABF において，①より，∠BAF＝120°　また，AF＝AB より，∠ABF＝$(180°-120°)\div2=30°$

よって，AB と KI のなす角は，**$\theta=30°$**

②



③



2 (1)①面 EDJK　②面 ABCDEF，GHIJKL

(2)面 CIJD を平行移動させると面 AGLF と重なるから，平面 ABHG と平面 AGLF のなす角を考える。

これは，直線 AB と AF のなす角と等しく，∠BAF＝120° であるから，平面 ABHG と平面 CIJD のなす角は，

$\theta=180°-120°=$**60°**

3 (1)

	面の数	面の形	1つの頂点に集まる面の数	頂点の数	辺の数
正四面体	**4**	**正三角形**	**3**	**4**	**6**
正六面体	**6**	**正方形**	**3**	**8**	**12**
正八面体	**8**	**正三角形**	**4**	**6**	**12**
正十二面体	**12**	**正五角形**	**3**	**20**	**30**
正二十面体	**20**	**正三角形**	**5**	**12**	**30**

(2)①この立体は，面が正方形 6 つと正三角形 8 つからなる立体である。よって，面の数は $6+8=$**14**

②各面の頂点の数の和は，$4\times6+3\times8=48$

ここで，1 つの頂点に集まる面の数は 4 つであるから，頂点の数は，$48\div4=$**12**

③各面の辺の数の和は，$4\times6+3\times8=48$

それぞれの面の 2 つの辺が重なって立体の 1 つの辺となるから，辺の数は，$48\div2=$**24**

〔別解〕 辺の数を e とすると，①，②の結果とオイラーの多面体定理より，

$12-e+14=2$　これを解いて，**$e=24$**

(3)①ひし形 BCDE において，点 H は二等辺三角形 ABD の底辺 BD の中点であるから，AH⊥BD　同様にして，AH⊥CE

よって，AH は平面 BCDE に垂直である。

また，AB＝AC，AH は共通，∠AHB＝∠AHC＝90° より，△ABH≡△ACH となるから，BH＝CH

したがって，BD＝CE となり，対角線の長さが等しいから，ひし形 BCDE は正方形である。

②正八面体の体積は，四角錐 A−BCDE の体積を求めて，それを 2 倍すればよい。

①より，四角形 BCDE は正方形だから，その面積は，$2\times2=4$

また，△CDH は直角二等辺三角形だから，$DH=\frac{1}{\sqrt{2}}CD=\frac{1}{\sqrt{2}}\times2=\sqrt{2}$

△ADH において，AD＝2，DH＝$\sqrt{2}$，∠AHD＝90° より，$AH=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$

AH は平面 BCDE に垂直であるから，四角錐 A−BCDE の体積は，

$\frac{1}{3}\times4\times\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

したがって，正八面体の体積は，$2\times\frac{4\sqrt{2}}{3}=$**$\frac{8\sqrt{2}}{3}$**