22 不等式の表す領域

一般に x, y に関する不等式があるとき，この**不等式をみたす点 (x, y) 全部の集合**のことを，その**不等式の表す領域**という．

ポイント1 直線と領域(1)

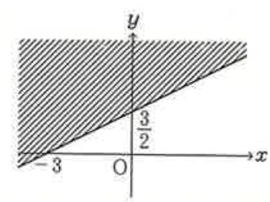
不等式 $y > kx + m$ の表す領域は，直線 $y = kx + m$ の上側の部分

不等式 $y < kx + m$ の表す領域は，直線 $y = kx + m$ の下側の部分

例題 不等式 $x - 2y \leqq -3$ の表す領域を図示せよ．

(解答) 与えられた不等式は $y \geqq \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ と変形できる．

直線 $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ を描き，その上側が求める領域である．



図の斜線部で，境界は含む

注意 領域を求める場合，境界を含むか含まないかは大変重要である．

確認問題 1 次の問に答えよ．

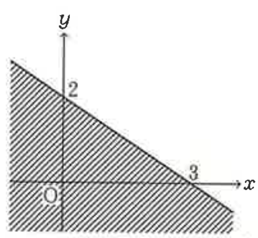
(1) 次の不等式の表す領域を図示せよ．

□① $y \leqq -x + 4$ □② $3x - 2y \leqq 1$

□③ $x + 2y + 4 > 0$ □④ $-2x + y > x + 3$

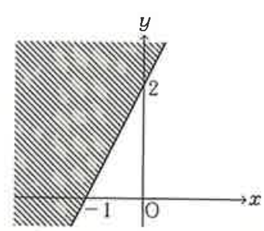
(2) 次の図の斜線部の領域を表す不等式を作れ．

□①



境界は含まない

□②



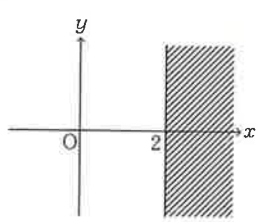
境界は含む

ポイント2 直線と領域(2)

例題 次の不等式の表す領域を図示せよ．

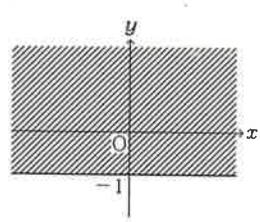
(1) $x > 2$ (2) $y \geqq -1$

(解答) (1)



図の斜線部で，境界は含まない

(2)



図の斜線部で，境界は含む

確認問題 2　次の不等式の表す領域を図示せよ．

□(1)　$y > 2$　　□(2)　$x \leqq 3$

□(3)　$y \leqq 1$

ポイント3　円と領域

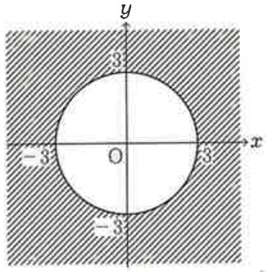
不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ の表す領域は，円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の内部

不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ の表す領域は，円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の外部

例題　次の不等式の表す領域を図示せよ．

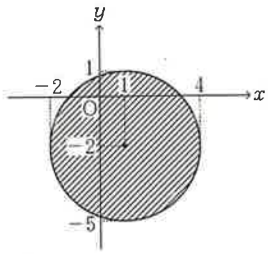
(1)　$x^2+y^2 \geqq 9$　　(2)　$x^2-2x+y^2+4y-4<0$

(解答) (1)



図の斜線部で，境界は含む

(2)　$(x-1)^2+(y+2)^2<3^2$



図の斜線部で，境界は含まない

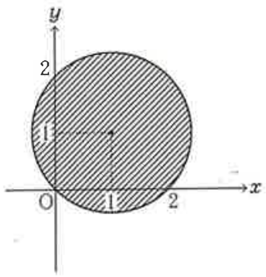
確認問題 3　次の問に答えよ．

(1)　次の不等式の表す領域を図示せよ．

□①　$x^2+y^2 \leqq 25$　　□②　$x^2+2x+y^2+y-1>0$

□(2)　中心が $(-1,\ -2)$，半径が 3 の円の外部を表す不等式を作れ．

□(3)　次の斜線部を表す不等式を作れ．



中心 $(1,\ 1)$ の円．
境界は含まない

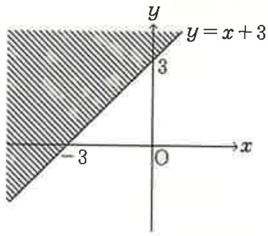
ポイント4　連立不等式の表す領域(1)

2 つ以上の不等式が連立不等式の形で与えられたとき，おのおのの不等式を表す領域を重ね合わせて**共通部分**をとったものが，**連立不等式の表す領域**になる．

例題　次の連立不等式の表す領域を図示せよ．

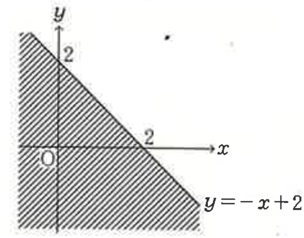
(1)　$\begin{cases} y > x+3 \\ x+y \leqq 2 \end{cases}$　　(2)　$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 4 \\ y > -\dfrac{1}{2}x+1 \end{cases}$

（解答）(1)〔第１の不等式の表す領域〕



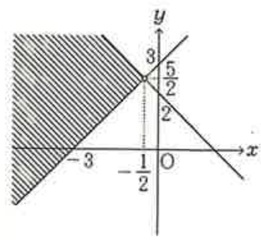
図の斜線部で，境界は含まない

〔第２の不等式の表す領域〕



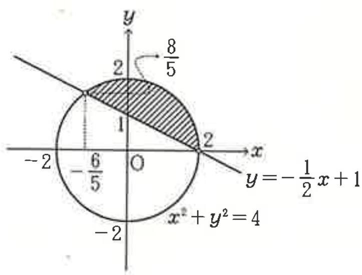
図の斜線部で，境界は含む

この両方を重ねて共通部分をとるので，
答は右図のようになる．



図の斜線部で，境界は
$y = x + 3$ 上は含まず，
$y = -x + 2$ 上は含む
$\left(\text{点}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)\text{は含まない}\right)$

(2)



図の斜線部で，境界は $x^2 + y^2 = 4$ 上は含み，
$y = -\dfrac{1}{2}x + 1$ 上は含まない
$\left(\text{点}\left(-\frac{6}{5},\ \frac{8}{5}\right),\ (2,\ 0)\text{は含まない}\right)$

確認問題４　次の連立不等式の表す領域を図示せよ．

□(1) $\begin{cases} y \leqq 2x - 1 \\ 3y - 2x \geqq 0 \end{cases}$　　□(2) $\begin{cases} x^2 + y^2 > 9 \\ 2x - y + 3 \leqq 0 \end{cases}$

ポイント５　連立不等式の表す領域(2)

a，b を実数とするとき，

$\boldsymbol{a \cdot b > 0 \iff a > 0,\ b > 0}$ **または** $\boldsymbol{a < 0,\ b < 0}$

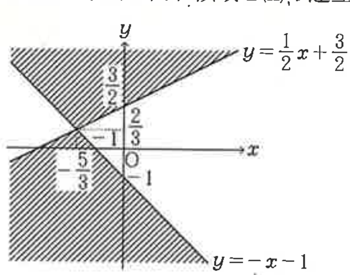
$\boldsymbol{a \cdot b < 0 \iff a > 0,\ b < 0}$ **または** $\boldsymbol{a < 0,\ b > 0}$

例題　不等式 $(x + y + 1)(x - 2y + 3) < 0$ の表す領域を図示せよ．

（解答） 与えられた不等式は

(i) $\begin{cases} x + y + 1 > 0 \\ x - 2y + 3 < 0 \end{cases}$　または　(ii) $\begin{cases} x + y + 1 < 0 \\ x - 2y + 3 > 0 \end{cases}$

(i)の連立不等式の表す領域と(ii)の連立不等式の表す領域の，和集合を作ればよい．



図の斜線部で，
境界はすべて含まない

確認問題 5 次の不等式の表す領域を図示せよ．

□(1) $(3x-y+4)(x+2y-1) \geqq 0$　　□(2) $y(x+2y-3)<0$

ポイント 6 放物線と領域

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a \neq 0)$ とする．このとき，$y=f(x)$ は放物線を表す．

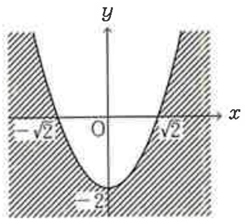
不等式 $y>f(x)$ の表す領域は，放物線 $y=f(x)$ の上側の部分

不等式 $y<f(x)$ の表す領域は，放物線 $y=f(x)$ の下側の部分

例題 次の不等式の表す領域を図示せよ．

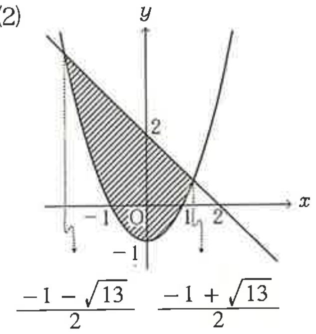
(1) $y \leqq x^2-2$　　(2) $\begin{cases} y \geqq x^2-1 \\ x+y \leqq 2 \end{cases}$

(解答) (1)



図の斜線部で，境界は含む

(2)



図の斜線部で，境界はすべて含む

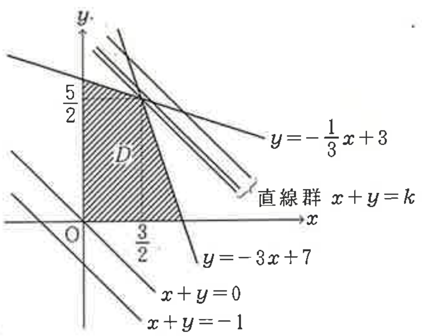
確認問題 6 次の不等式の表す領域を図示せよ．

□(1) $y>x^2-2x-1$　　□(2) $\begin{cases} y \leqq \dfrac{x}{2}-1 \\ y<-x^2+2x \end{cases}$

ポイント 7 応用(1)：最大値・最小値

例題 **x，y が4つの不等式 $\begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \\ y \leqq -\dfrac{1}{3}x+3 \\ y \leqq -3x+7 \end{cases}$ をみたすとき，$x+y$ の最大値，最小値を求めよ．**

(解答) $x+y=k$ とおく．まず与えられた連立不等式をみたす $(x,\ y)$ の領域 D は下図の斜線の部分で，境界はすべて含む．



一方，$x+y=k$ は傾き -1，y 切片が k の直線を表す．そして k の値によって平行な直線群が得られる．直線 $y=-x+k$ が D と共有点をもてば，その共有点の $x+y$ の値は k である．よって，

$x+y$ の最大値　‥‥　直線 $x+y=k$ が D と共有点をもつ最大の k

$x+y$ の最小値　‥‥　直線 $x+y=k$ が D と共有点をもつ最小の k

上の図より，

$x+y$ の最大値　$\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4$　$\left(x=\frac{3}{2},\ y=\frac{5}{2}\right)$

$x+y$ の最小値　$0+0=0$　$(x=y=0)$

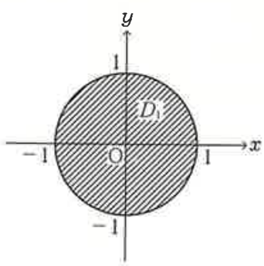
確認問題 7□　x，y が4つの不等式 $\begin{cases} x \geqq 0 \\ y \leqq 0 \\ y \geqq 4x-10 \\ y \geqq -\frac{1}{2}x-1 \end{cases}$ をみたすとき，$y-x$ の最大値，最小値を求めよ．

ポイント8　応用(2)：命題の図形的解法

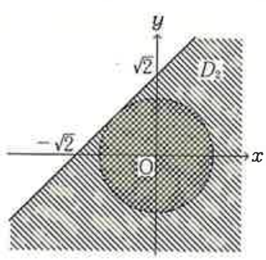
例題　次の命題が成り立つことを証明せよ．

$x^2+y^2<1$ なら　$x-y>-\sqrt{2}$

（解答）　$x^2+y^2<1$ をみたす $(x,\ y)$ の領域 D_1 は次の通りで，境界は含まない．



$x-y>-\sqrt{2}$ をみたす $(x,\ y)$ の領域 D_2 は下図の ▨ の部分で，これも境界は含まない．



ここで $D_1 \subset D_2$ である．

つまり，$x^2+y^2<1$ をみたす $(x,\ y)$ はすべて $x-y>-\sqrt{2}$ をみたす．

確認問題 8□　次の命題が成り立つことを証明せよ．

$x^2+y^2<4$ なら　$x+y>-3$

練成問題 A

1 次の不等式の表す領域を図示せよ． (⇨ポイント１，２)

□(1) $y \geqq 3x - 1$

□(2) $y < 2$

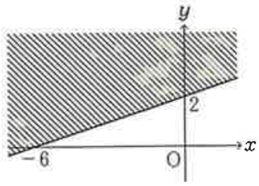
□(3) $x > 2y + 1$

□(4) $x \geqq -1$

□(5) $3x - 2y + 5 \leqq 0$

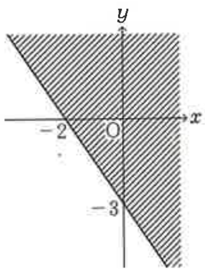
2 次の図の斜線部の領域を表す不等式を作れ． (⇨ポイント１，２)

□(1)



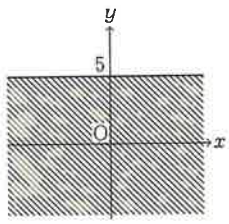
境界は含まない

□(2)



境界は含む

□(3)



境界は含まない

3 次の不等式の表す領域を図示せよ． (⇨ポイント３)

□(1) $3x^2 + 3y^2 - \frac{1}{3} \leqq 0$

□(2) $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 > 25$

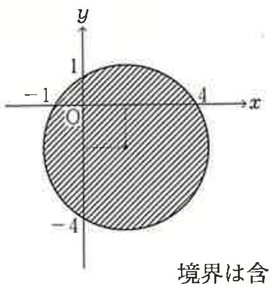
□(3) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 \leqq 25$

□(4) $x^2 + y^2 + x - y \leqq \frac{7}{2}$

4 次の問に答えよ． (⇨ポイント３)

□(1) 中心が $(1,\ -3)$ で，半径が 5 の円の外部を表す不等式を作れ．

□(2) 次の斜線部を表す不等式を作れ．



境界は含まない

5　次の連立不等式の表す領域を図示せよ．　(⇨ポイント４)

□(1)　$\begin{cases} x \geqq -1 \\ y < 2x+5 \end{cases}$　□(2)　$\begin{cases} x \geqq y-3 \\ 2x-5y \leqq 0 \end{cases}$　□(3)　$\begin{cases} 2y \leqq 3x+1 \\ y+x > 5 \end{cases}$

□(4)　$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 5 \\ y \leqq 1 \end{cases}$　□(5)　$\begin{cases} x^2+y^2 \geqq 25 \\ y < -\dfrac{1}{2}x+4 \end{cases}$

6　次の不等式の表す領域を図示せよ．　(⇨ポイント５)

□(1)　$(x-2)(y+1) \leqq 0$　□(2)　$(x+y-1)(x-y+2) > 0$

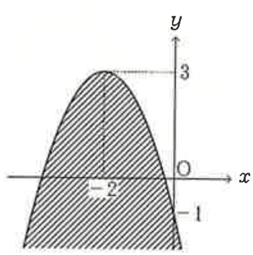
□(3)　$(x^2+y^2-1)(x-y+1) \geqq 0$　□(4)　$(2x+y+1)(4x-3y+1) \leqq 0$

7　次の不等式の表す領域を図示せよ．　(⇨ポイント６)

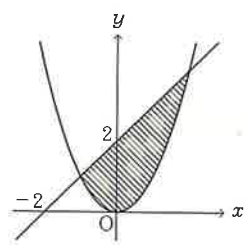
□(1)　$y > -x^2+4x-4$　□(2)　$y \geqq \dfrac{1}{2}x^2-3x+1$

8　次の図の斜線部の領域を表す不等式を作れ．　(⇨ポイント６)

□(1)　$(-2,\ 3)$ を頂点にもち，$(0,\ -1)$ を通る放物線．領域の境界は含まず．



□(2)



図中の放物線は　$y=x^2$

領域の境界はすべて含む

9□　x，y が４つの不等式 $\begin{cases} x \leqq 0 \\ y \geqq 0 \\ y \leqq -\dfrac{1}{3}x+3 \\ y \leqq 4x+8 \end{cases}$ をみたすとき，$y-x$ の最大値，最小値を求めよ．

(⇨ポイント７)

10□　次の命題を証明せよ．　(⇨ポイント８)

$x^2+(y-1)^2 \leqq 1$ なら $y \leqq -x^2+3$

練成問題 B

1 次の不等式の表す領域を図示せよ.

□(1) $-1 \leqq x < 1$

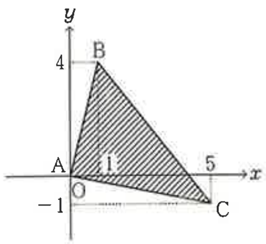
□(2) $4 \leqq x^2 + y^2 < 9$

□(3) $-3 \leqq 2x - y + 2 \leqq 4$

□(4) $-2 \leqq y - x^2 \leqq 4$

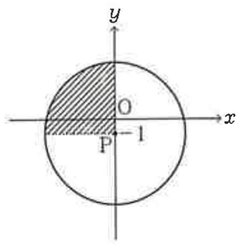
2 次の図の斜線部の領域を表す不等式を作れ. ただし, 境界はすべて含まないものとする.

□(1)



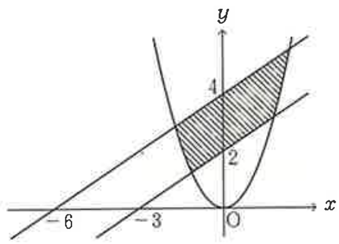
△ABC の内部

□(2)



中心が P(0, −1) で,
半径が 5 の円の, 図の部分

□(3)



放物線は $y = x^2$

3 次の連立不等式の表す領域を図示せよ.

□(1) $\begin{cases} xy < 0 \\ x^2 + y^2 \leqq 5 \end{cases}$

□(2) $\begin{cases} (x+1)(y-2) < 0 \\ y \geqq |x| \end{cases}$

□(3) $\begin{cases} y \leqq |x| \\ x^2 + y^2 \leqq 9 \end{cases}$

□(4) $\begin{cases} x(x-1) \leqq 0 \\ y(y+1) \geqq 0 \end{cases}$

4□ $x^2 + y^2 \leqq 5$ のとき, $x + 2y$ の最大値, 最小値を求めよ.

5□ x, y が $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqq 3 \\ y \geqq x \end{cases}$ をみたすとき, $y - x$ の最大値, 最小値を求めよ.

6□ 次の命題を証明せよ.

$x^2 + (y+1)^2 \leqq 1$ なら, 任意の正の実数 k に対し $y \leqq kx^2$

練成問題C（2）

1 次の不等式が表す領域を図示せよ.

□(1) $|x| - |y| > 0$

□(2) $(x^2 + y^2 - 1)(|x| - |y|) > 0$

2 次の問に答えよ.

□(1) 曲線 $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 1 = 0$ と直線 $y = x + 1$ との交点の座標をすべて求めよ.

□(2) 不等式 $(x^2 - 4x + y^2 - 2y + 1)(x - y + 1) \leqq 0$ の表す領域を図示せよ.

3 次の問に答えよ.

□(1) xy 平面で，4つの不等式 $5x - 2y \geqq -10$，$3x + 4y \geqq -6$，$x - 2y \leqq 4$，$5x + 4y \leqq 20$ を同時にみたす領域を図示せよ.

□(2) 点 $(x,\ y)$ が(1)の領域を動くとき，$2x + y$ の最大値と最小値を求めよ.

4□ xy 平面上の動点 P，Q の座標をそれぞれ $\mathrm{P}(p_1,\ p_2)$，$\mathrm{Q}(q_1,\ q_2)$ とするとき

$$q_1 = 2p_1 + 3p_2 + 1,\quad q_2 = 2p_1 - 3p_2 - 1$$

という関係があるとする．いま動点 P が座標軸に平行でない直線 g 上を動くとき，Q は点 $(1,\ 3)$ を通り，かつ直線 g に垂直な直線 l 上を動くという．直線 g の方程式を求めよ.

5 平面上の2点 A(3，2)，B(10，9) を通る円 C を考える.

□(1) 円 C の中心は直線 $y = \boxed{\text{ア}}\,x + \boxed{\text{イ}}$ 上にある．とくに，中心が x 軸上にあるならば，円 C の方程式は $x^2 + y^2 - \boxed{\text{ウ}}\,x + \boxed{\text{エ}} = 0$ である.

□(2) 円 C が x 軸と共有点をもつためには，円の中心の x 座標 a が $a \leqq \boxed{\text{オ}}$ または $\boxed{\text{カ}} \leqq a$ の範囲にあることが必要十分である.

□(3) 円 C が x 軸と相異なる2点 P，Q で交わり，$\angle\mathrm{PAB} = 90^\circ$ となるとき，円 C の方程式は

$$x^2 + y^2 - \boxed{\text{キ}}\,x - \boxed{\text{ク}}\,y + \boxed{\text{ケ}} = 0$$

である．このとき P の x 座標は $\boxed{\text{コ}}$ であり，Q の x 座標は $\boxed{\text{サ}}$ である.

6 3点A(0, 0), B(1, 0), C(0, $\sqrt{3}$)について，次の問に答えよ．

□(1) 直線BCの方程式を求めよ．

□(2) 点Aと直線BCの距離を求めよ．

□(3) 三角形ABCを，点Aを中心として反時計回りに90°回転させたとき，三角形ABCが通過してできる図形の面積を求めよ．

7 2次関数$f(x)=-x^2+px-1$と$g(x)=x^2+qx+1$（p, qは定数）について，次の問に答えよ．

□(1) すべての実数xに対し，$f(x)<g(x)$が成り立つとき，点$(p,\ q)$の動き得る範囲を求め，図示せよ．

□(2) $f(x)$の最大値をMとし，$g(x)$の最小値をmとする．$M<m$が成り立つとき，点$(p,\ q)$の動き得る範囲を求め，図示せよ．

8 2点A(1, −3), B(6, 7)と円$x^2+y^2-2ay+a^2-b=0$がある．

□(1) 線分ABを3：2に内分する点Cの座標を求めよ．

□(2) この円が点Cにおいて，線分ABに接するとき，a, bの値を求めよ．

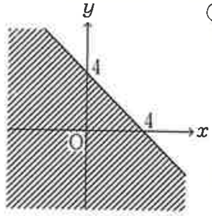
9□ 直線$3x-4y+10=0$とx軸の両方に接する円の中心の軌跡の方程式を求めよ．

10□ 原点を中心とする半径rの円と放物線$y=\frac{1}{2}x^2+1$との両方に接する直線のうちに互いに直交するものがある．rの値を求めよ．

22 不等式の表す領域〔P 110～P 117〕

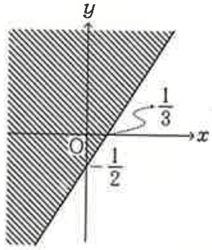
◇確認問題〔P 110～P 114〕

1 (1)①



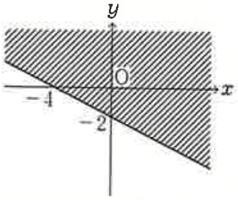
図の斜線部で，
境界は含む

②



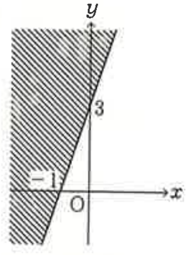
図の斜線部で，
境界は含む

③



図の斜線部で，
境界は含まない

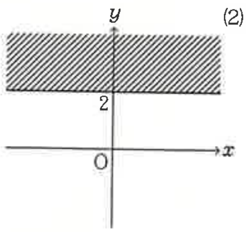
④



図の斜線部で，
境界は含まない

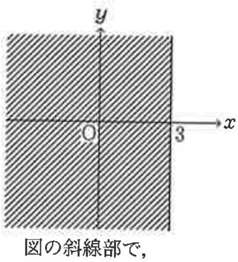
(2)① $y < -\frac{2}{3}x + 2$　　② $y \geqq 2x + 2$

2 (1)



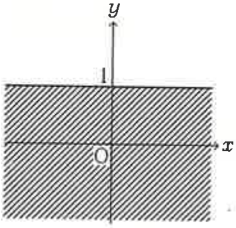
図の斜線部で，
境界は含まない

(2)



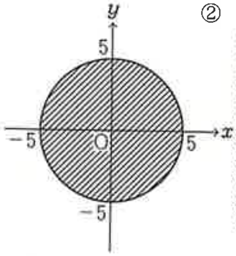
図の斜線部で，
境界は含む

(3)



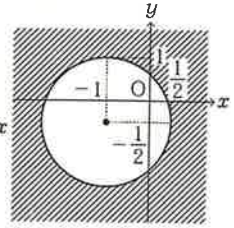
図の斜線部で，境界は含む

3 (1)①



図の斜線部で，境界は含む

②



図の斜線部で，境界は
含まない

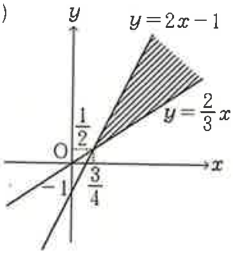
(2) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 > 3^2$　　(3) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 < 2$

［解説］

(1)② 与式の左辺$= (x + 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 > 0$

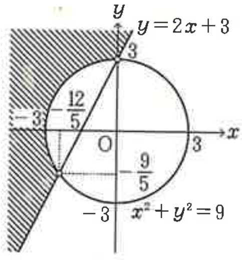
(3) 与えられた円の半径は $\sqrt{2}$ である。

4 (1)



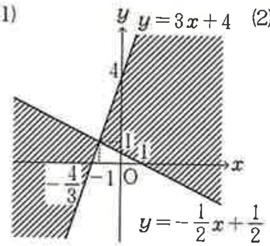
図の斜線部で，
境界はすべて含む

(2)



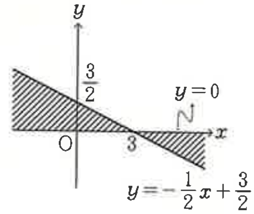
図の斜線部で，境界は
円弧の部分は含まず，
直線部分は含む（点 $(0, 3)$，
$\left(-\frac{12}{5},\ -\frac{9}{5}\right)$は含まない）

5 (1)



図の斜線部で，
境界はすべて含む

(2)



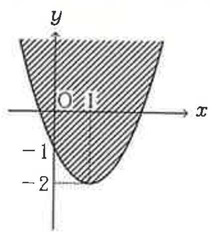
図の斜線部で，境界は
すべて含まない

［解説］

(1) $3x - y + 4 \geqq 0$，$x + 2y - 1 \geqq 0$ の領域
　$3x - y + 4 \leqq 0$，$x + 2y - 1 \leqq 0$ の領域
の和集合を作ればよい。

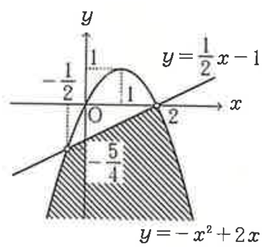
(2) $y < 0$，$x + 2y - 3 > 0$ の領域
　$y > 0$，$x + 2y - 3 < 0$ の領域
の和集合を作ればよい。

6 (1)



図の斜線部で，
境界は含まない

(2)



図の斜線部で，境界は直
線部分は含み，放物線上
は含まない（点$(2,\ 0)$，
$\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{5}{4}\right)$は含まない）

［解説］

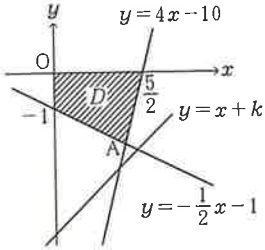
(1) $y = x^2 - 2x - 1 = (x - 1)^2 - 2$

(2) $y = -x^2 + 2x = -(x - 1)^2 + 1$

7 最大値 0（$x = 0$，$y = 0$），最小値 −4（$x = 2$，$y = -2$）

[解説]

連立不等式をみたす点 $(x,\ y)$ の領域 D を図示すると，図の斜線部で，境界はすべて含む．



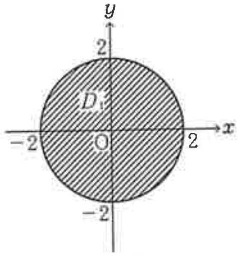
$\begin{cases} y = 4x - 10 \\ y = -\frac{1}{2}x - 1 \end{cases}$ の交点，

つまり点Aの座標は

$(2,\ -2)$

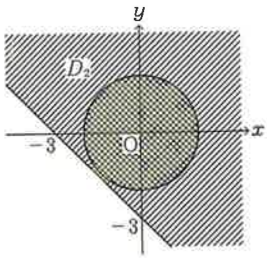
$y - x = k$ とおく．これが領域 D と交わる最小の k は点Aを通過するとき，最大の k は原点Oを通過するときである．

8 $x^2 + y^2 < 4$ をみたす $(x,\ y)$ の領域 D_1 は右図のようになる．



図の斜線部で，境界は含まない

一方，$x + y > -3$ をみたす $(x,\ y)$ の領域 D_2 は右図のようになる．

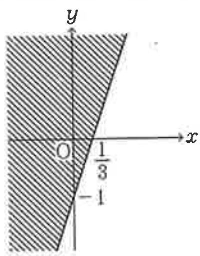


図の斜線部で，境界は含まない

よって　$D_1 \subset D_2$

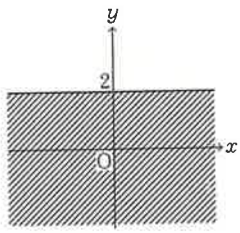
◇練成問題A（P 115～P 116）

1 (1)



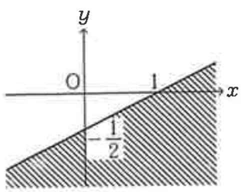
図の斜線部で，境界は含む

(2)



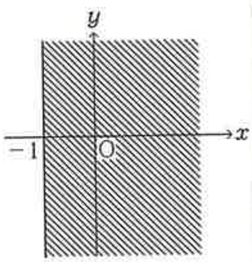
図の斜線部で，境界は含まない

(3)



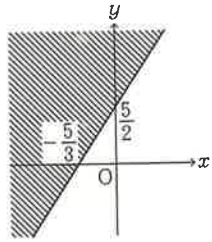
図の斜線部で，境界は含まない

(4)



図の斜線部で，境界は含む

(5)



図の斜線部で，境界は含む

2 (1)　$y > \frac{1}{3}x + 2$　(2)　$y \geqq -\frac{3}{2}x - 3$　(3)　$y < 5$

[解説]

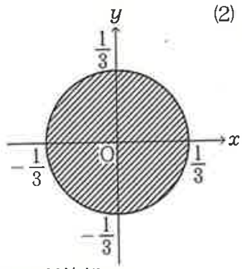
(1)　$(-6,\ 0)$，$(0,\ 2)$ を通る直線の方程式は

$y = \frac{1}{3}x + 2$

(2)　$(-2,\ 0)$，$(0,\ -3)$ を通る直線の方程式は

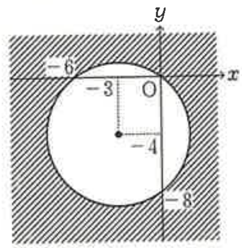
$y = -\frac{3}{2}x - 3$

3 (1)



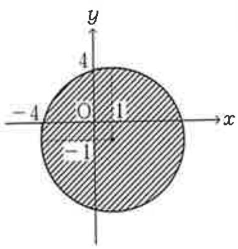
図の斜線部で，境界は含む

(2)



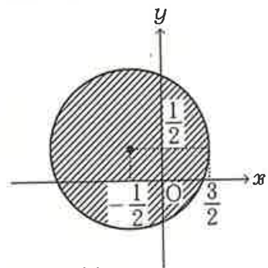
図の斜線部で，境界は含まない

(3)



図の斜線部で，境界は含む

(4)



図の斜線部で，境界は含む

[解説]

(1)　$x^2 + y^2 \leqq \left(\frac{1}{3}\right)^2$

(4)　$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leqq 2^2$

4 (1)　$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 > 5^2$

(2)　$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{17}{2}$

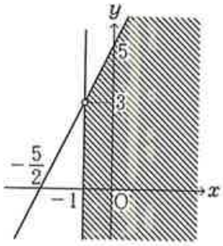
[解説]

(2)　境界の円は $(-1,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(0,\ -4)$ を通るので，中心は

$$\left(\frac{-1+4}{2},\ \frac{1-4}{2}\right) = \left(\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$$

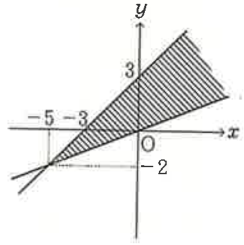
また，$(\text{半径})^2 = \left\{\frac{3}{2} - (-1)\right\}^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{34}{4}$

5 (1)



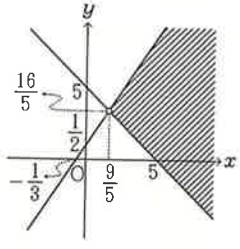
図の斜線部で，境界は，
$y = 2x + 5$ は含まず，
$x = -1$ は含む
（点$(-1,\ 3)$は含まない）

(2)



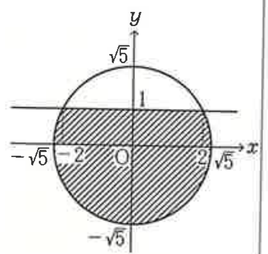
図の斜線部で，境界は
すべて含む

(3)



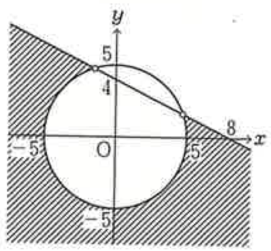
図の斜線部で，境界は，
$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ は含み，
$y = -x + 5$ は含まない
（点$\left(\frac{9}{5},\ \frac{16}{5}\right)$は含まない）

(4)



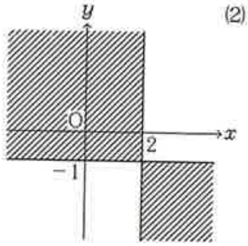
図の斜線部で，境界は
すべて含む

(5)



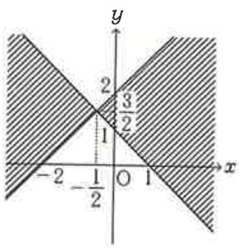
図の斜線部で，境界は，
$y = -\frac{1}{2}x + 4$ は含まず，
$x^2 + y^2 = 25$ は含む

6 (1)



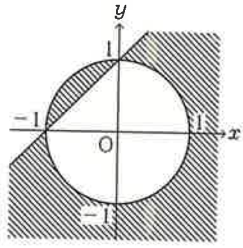
図の斜線部で，境界は
すべて含む

(2)



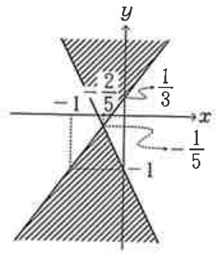
図の斜線部で，境界は
すべて含まない

(3)



図の斜線部で，境界は
すべて含む

(4)



図の斜線部で，境界は
すべて含む

［解説］

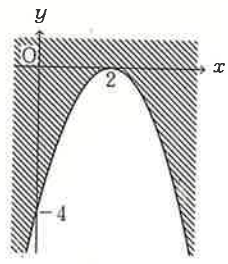
(1) $x \geqq 2,\ y \leqq -1$ または $x \leqq 2,\ y \geqq -1$

(2) $y > -x + 1,\ y < x + 2$
　または
　$y < -x + 1,\ y > x + 2$

(3) $x^2 + y^2 \geqq 1,\ y \leqq x + 1$
　または
　$x^2 + y^2 \leqq 1,\ y \geqq x + 1$

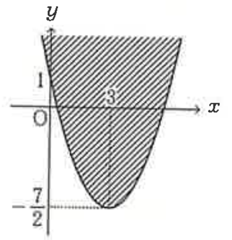
(4) $y \geqq -2x - 1,\ y \geqq \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$
　または
　$y \leqq -2x - 1,\ y \leqq \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$

7 (1)



図の斜線部で，
境界は含まない

(2)



図の斜線部で，
境界は含む

［解説］

(1) $-x^2 + 4x - 4 = -(x-2)^2$

(2) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 = \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{7}{2}$

8 (1) $y < -(x+2)^2 + 3$

(2) $\begin{cases} y \geqq x^2 \\ y \leqq x + 2 \end{cases}$

［解説］

(1) 境界の放物線は，頂点の座標が$(-2,\ 3)$であることより $y = a(x+2)^2 + 3$ とおけ，$(0,\ -1)$を通ることより $a = -1$ がわかる．

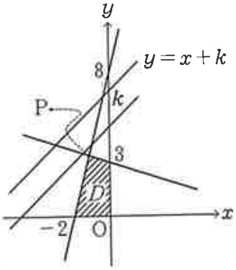
(2) 放物線 $y = x^2$ の上部と，直線 $y = x + 2$ の下部の共通部分である．

9 最大値 $\frac{59}{13}$ $\left(x = -\frac{15}{13},\ y = \frac{44}{13}\right)$

最小値 0 $(x = 0,\ y = 0)$

[解説]

4つの不等式をみたす点 $(x,\ y)$ の領域 D を図示すると，右図のようになる．このDと $y-x=k$，すなわち直線群 $y=x+k$ との交点を求める．k が最大になるのは $y=x+k$ が図中の点Pを通るとき．

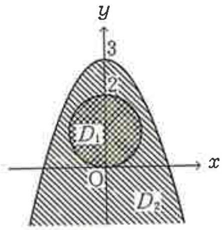


Pの座標は $\begin{cases} y=-\dfrac{1}{3}x+3 \\ y=4x+8 \end{cases}$ を連立させれば求まり，

$\left(-\dfrac{15}{13},\ \dfrac{44}{13}\right)$ である．$\dfrac{44}{13}=-\dfrac{15}{13}+k$ によって k が求まる．

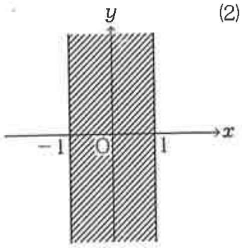
k が最小になるのは，$y=x+k$ が原点を通るとき．

10 $x^2+(y-1)^2 \leqq 1$ をみたす $(x,\ y)$ の領域を D_1 とし，$y \leqq -x^2+3$ をみたす $(x,\ y)$ の領域を D_2 とすれば，右図より $D_1 \subset D_2$ となっている．



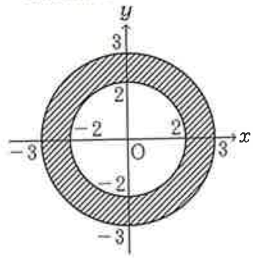
◇練成問題B〔P 117〕

1 (1)



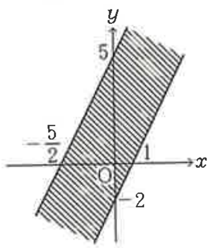
図の斜線部で，境界は，$x=-1$ は含み，$x=1$ は含まない

(2)



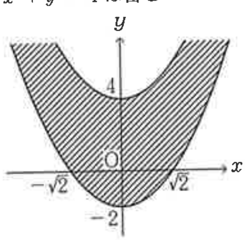
図の斜線部で，境界は，$x^2+y^2=9$ は含まず，$x^2+y^2=4$ は含む

(3)



図の斜線部で，境界はすべて含む

(4)



図の斜線部で，境界はすべて含む

[解説]

(3) $y \leqq 2x+5$，$y \geqq 2x-2$

(4) $y \geqq x^2-2$，$y \leqq x^2+4$

2 (1) $\begin{cases} y<4x \\ y>-\dfrac{1}{5}x \\ y<-\dfrac{5}{4}x+\dfrac{21}{4} \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x^2+(y+1)^2<25 \\ x<0 \\ y>-1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y>x^2 \\ \dfrac{2}{3}x+2<y<\dfrac{2}{3}x+4 \end{cases}$

[解説]

(1) 直線ABの方程式は　$y=4x$

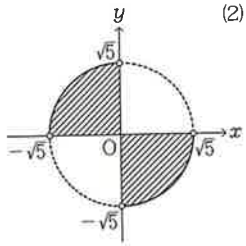
直線ACの方程式は　$y=-\dfrac{1}{5}x$

直線BCの方程式は　$y=-\dfrac{5}{4}x+\dfrac{21}{4}$

(3) $(-3,\ 0)$，$(0,\ 2)$ を通る直線は　$y=\dfrac{2}{3}x+2$

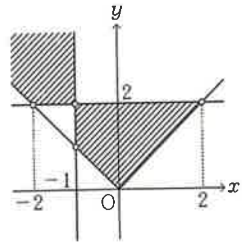
$(-6,\ 0)$，$(0,\ 4)$ を通る直線は　$y=\dfrac{2}{3}x+4$

3 (1)



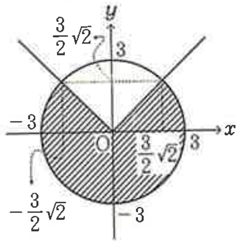
図の斜線部で，境界は，座標軸は含まず，$x^2+y^2=5$ は含む

(2)



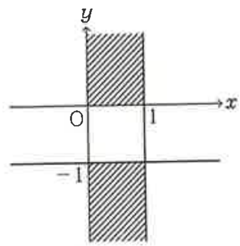
図の斜線部で，境界は，$y=2$，$x=-1$ は含まず，$y=|x|$ は含む

(3)



図の斜線部で，境界はすべて含む

(4)



図の斜線部で，境界はすべて含む

[解説]

(1) $x^2+y^2 \leqq 5$ の領域のうち，$x>0$，$y<0$（第4象限）または $x<0$，$y>0$（第2象限）の部分

(2) $y \geqq |x|$ の領域のうち，$x>-1$，$y<2$ または $x<-1$，$y>2$ の部分

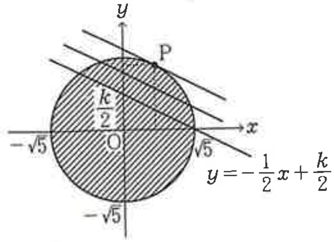
(4) 与式 $\iff \begin{cases} 0 \leqq x \leqq 1 \\ y \geqq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} 0 \leqq x \leqq 1 \\ y \leqq -1 \end{cases}$

4 最大値5（$x=1$，$y=2$）

最小値−5（$x=-1$，$y=-2$）

[解説]

$x^2+y^2 \leqq 5$ をみたす $(x,\ y)$ の領域は，原点が中心，半径が $\sqrt{5}$ の円の内部である（境界も含む）．これと $x+2y=k$，すなわち



$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{k}{2}$ の交点をみる．

k が最大になるのは $y=-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}$ が図中の点Pで円に接しているときである．Pの座標はOPの傾きが2であることより容易に求まって，それは(1, 2)である．また，$k=x+2y$ より k が求まる．

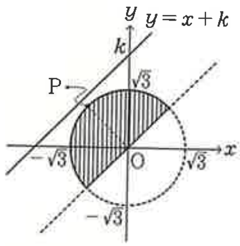
図形の原点対称性から，最小値も求まる．

5 最大値 $\sqrt{6}$ $\left(x=-\frac{\sqrt{6}}{2},\ y=\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

最小値 0 $\left(x=a,\ y=a,\ \text{ただし}\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\leqq a\leqq\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

［解説］

$\begin{cases} x^2+y^2\leqq 3 \\ y\geqq x \end{cases}$ をみたす $(x,\ y)$ の領域は下図の通り（境界はすべて含む）．



これと $y-x=k$，すなわち $y=x+k$ との交点をみる．

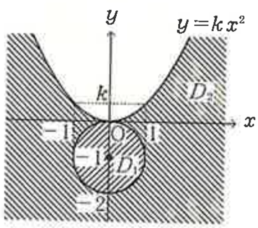
k が最大の値をとるのは，$y=x+k$ と円が図中のPで接したときで，このときPの座標は

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+k$ より $k=\sqrt{6}$

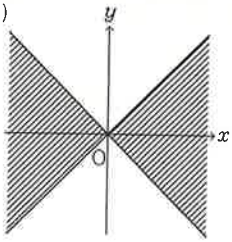
最小値も同様にする．

6 $x^2+(y+1)^2\leqq 1$ をみたす $(x,\ y)$ の領域を D_1 とし，$y\leqq kx^2$ をみたす $(x,\ y)$ の領域を D_2 とすると，右図より $D_1\subset D_2$



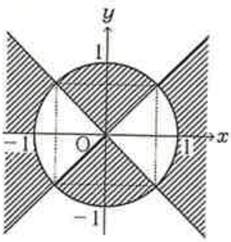
練成問題C（2）（P 118〜P 119）

1 (1)



図の斜線部で，境界は含まない

(2)



図の斜線部で，境界は含まない

［解説］

(1) $x\geqq 0,\ y\geqq 0$ のとき $x-y>0$

$x\geqq 0,\ y\leqq 0$ のとき $x+y>0$

$x\leqq 0,\ y\geqq 0$ のとき $-x-y>0$

$x\leqq 0,\ y\leqq 0$ のとき $-x+y>0$

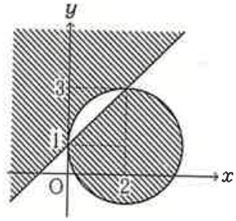
(2) $x^2+y^2>1$ かつ $|x|>|y|$

または

$x^2+y^2<1$ かつ $|x|<|y|$

2 (1) (0, 1), (2, 3)

(2)



図の斜線部で，境界を含む

［解説］

(1) $y=x+1$ を曲線の式に代入して

$x^2-4x+(x+1)^2-2(x+1)+1=0$ より

$x(x-2)=0$ よって $x=0,\ 2$

これより $y=1,\ 3$

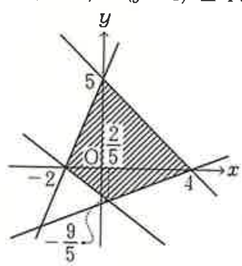
(2) $x^2-4x+y^2-2y+1=(x-2)^2+(y-1)^2-4$ より

$(x-2)^2+(y-1)^2\geqq 4$ かつ $y\geqq x+1$

または

$(x-2)^2+(y-1)^2\leqq 4$ かつ $y\leqq x+1$

3 (1)



図の斜線部で，境界は含む

(2) 最大値 8 $(x=4,\ y=0)$，最小値 −4 $(x=-2,\ y=0)$

［解説］

(2) $2x+y=k$ とおくと $y=-2x+k$

これが図の斜線部と交わるときの k の最大値，最小値を考える．

4 $y=2x-\frac{8}{3}$，$y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

［解説］

g の傾きを m とおくと，

$g:y=mx+n$，$l:y=-\frac{1}{m}(x-1)+3$

とおける．$\mathrm{P}(p_1,\ p_2)$ が g 上にあることから

$p_2=mp_1+n$ …… ①

$\mathrm{Q}(q_1,\ q_2)$ が l 上にあることから

$2p_1-3p_2-1=-\frac{1}{m}(2p_1+3p_2)+3$ …… ②

①，②より p_2 を消去すると

$(-3m^2+5m+2)\,p_1+(-3mn+3n-4m)=0$

これがすべての実数 p_1 に対して成り立つから

$\begin{cases} 3m^2-5m-2=0 & \cdots\cdots ③ \\ -3mn+3n-4m=0 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$

③より $m=2,\ -\frac{1}{3}$

④に代入して $m=2$ のとき $n=-\frac{8}{3}$

$m=-\frac{1}{3}$ のとき $n=-\frac{1}{3}$

5 (1) ア -1　イ 12　ウ 24　エ 59
(2) オ -5　カ 7
(3) キ 15　ク 9　ケ 50　コ 5　サ 10

[解説]

(1) ABの垂直二等分線は $y=-x+12$．よって円の中心はこの線上にある．これと x 軸との交点は $(12,\ 0)$
よってそのときの円の方程式は
$$(x-12)^2+y^2=(12-3)^2+(0-2)^2$$
これより　$x^2+y^2-24x+59=0$

(2) 中心を $(a,\ -a+12)$ とするとき，円の方程式は
$$(x-a)^2+(y+a-12)^2$$
$$=(a-3)^2+(-a+12-2)^2$$
$y=0$ を代入して
$$(x-a)^2=a^2-2a-35$$
よって　$a^2-2a-35\geqq 0$ より　$a\leqq -5,\ 7\leqq a$

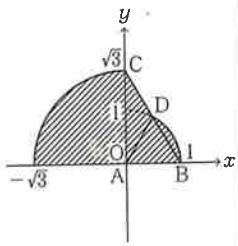
(3) PBが円 C の直径になればよい．ABの傾きは1だから，直線APは $y=-(x-3)+2$
これより $\mathrm{P}(5,\ 0)$
C は $\mathrm{P}(5,\ 0)$，$\mathrm{B}(10,\ 9)$ を直径の両端とする円だから，円 C の任意の点を $\mathrm{R}(x,\ y)$ とすると，
$\angle\mathrm{PRB}=\dfrac{\pi}{2}$ より
$$\frac{y-0}{x-5}\times\frac{y-9}{x-10}=-1$$
$$(x-5)(x-10)+y(y-9)=0$$
$$x^2+y^2-15x-9y+50=0$$
また $y=0$ より $x=5,\ 10$ だから，$\mathrm{Q}(10,\ 0)$

6 (1) $y=-\sqrt{3}\,x+\sqrt{3}$　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(3) $\dfrac{11}{12}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

[解説]

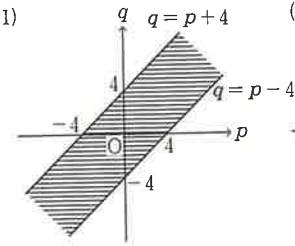
(2) $\sqrt{3}\,x+y-\sqrt{3}=0$ と $(0,\ 0)$ に点と直線の距離の公式を使うと　$\dfrac{|-\sqrt{3}|}{\sqrt{3+1}}$

(3) 三角形ABCが通過してできる図形は次図の通り．Bが動いてできる円とBCとの交点をDとすると，
$\mathrm{AD}=\mathrm{AB}\ \ (=1)$



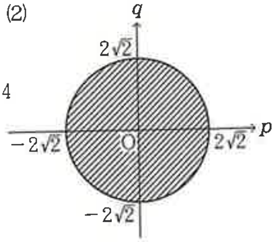
$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{3}$ より
$$\angle\mathrm{BAD}=\frac{\pi}{3}$$
よって　$\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
これより面積は
$$\pi\times(\sqrt{3})^2\times\frac{1}{4}+1\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}+\left(\pi\times1^2\times\frac{1}{6}-1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{11}{12}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

7 (1)



図の斜線部で，境界は含まない

(2)



図の斜線部で，境界は含まない

[解説]

(1) $f(x)<g(x)$ より $2x^2+(q-p)x+2>0$
これがすべての実数 x に対して成り立つから
$$D=(q-p)^2-16<0$$
$$(q-p-4)(q-p+4)<0$$

(2) $f(x)=-\left(x-\dfrac{p}{2}\right)^2+\dfrac{p^2}{4}-1$ より　$M=\dfrac{p^2}{4}-1$
$g(x)=\left(x+\dfrac{q}{2}\right)^2-\dfrac{q^2}{4}+1$ より　$m=-\dfrac{q^2}{4}+1$
$M<m$ より　$p^2+q^2<8$

8 (1) $(4,\ 3)$　(2) $a=5,\ b=20$

[解説]

(2) $x^2+(y-a)^2=b$ より円の中心Dは　$\mathrm{D}\,(0,\ a)$
直線CDと直線ABが直交していることから
$$\frac{7+3}{6-1}\cdot\frac{3-a}{4-0}=-1 \text{ より}\quad a=5$$
Cが円上にあることから
$$4^2+(3-5)^2=b \text{ より}\quad b=20$$

9 直線 $3x-9y+10=0,\ 3x+y+10=0$
ただし点 $\left(-\dfrac{10}{3},\ 0\right)$ を除く

[解説]

中心の座標を $(x,\ y)$ とする．
直線 $3x-4y+10=0$ と x 軸に接することから，
$$\frac{|3x-4y+10|}{5}=|y|,\quad 3x-4y+10=\pm5y$$

10 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

[解説]

放物線上の点を $\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2+1\right)$ とする．接線の傾きを k とすると，
$$y=k(x-t)+\frac{1}{2}t^2+1$$
$$kx-kt+\frac{1}{2}t^2+1=\frac{1}{2}x^2+1$$
$$\therefore\ x^2-2kx-t^2+2kt=0$$
$$\frac{D}{4}=k^2+t^2-2kt=0$$
$$(k-t)^2=0$$
$$\therefore\ k=t$$
したがって接線は
$$y=t(x-t)+\frac{1}{2}t^2+1$$
$$2tx-2y-t^2+2=0$$
これが原点を中心とする半径 r の円と接することより

$$\frac{|-t^2+2|}{\sqrt{4t^2+4}}=r$$

$$t^4-4(1+r^2)t^2+4(1-r^2)=0$$

この4つの解を $\pm\sqrt{\alpha}$, $\pm\sqrt{\beta}$ とすると（α, β は実数で $\alpha \geqq \beta > 0$），「$\alpha = 1$ または $\beta = 1$」，または「$\alpha\beta = 1$」

$\alpha = 1$ または $\beta = 1$ のとき　$r = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\alpha\beta = 1$ のとき　$r = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$