高校数学　YIO　秋期休講　宿題

まずは STEP　A を確実にできるようにしましょう。

STEP　B レベルも、できるだけ解けるように努力をしてみてください。

宿題用のノートか別紙に記入してください。(授業用ノートに書かないようにしてください。)

第1章　式と証明

第1節　式と計算

1　3次式の展開と因数分解

1　3次式の展開の公式

1　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$,　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

2　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$,　$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

2　3次式の因数分解の公式

3　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$,　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

STEP A

1　公式1を用いて，次の式を展開せよ。

*(1)　$(a+3)^3$　　(2)　$(2x-1)^3$　　(3)　$(4x+y)^3$

*(4)　$(-5a+2b)^3$　　*(5)　$(ab-2)^3$　　(6)　$(2x^2+3y)^3$

2　公式2を用いて，次の式を展開せよ。

*(1)　$(x+4)(x^2-4x+16)$　　(2)　$(1-a)(1+a+a^2)$

(3)　$(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$　　*(4)　$(5x-2y)(25x^2+10xy+4y^2)$

3　次の式を展開せよ。

(1)　$(2x+1)^3(2x-1)^3$　　*(2)　$(a+2b)^2(a^2-2ab+4b^2)^2$

(3)　$(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

4　公式3を用いて，次の式を因数分解せよ。

*(1)　$8x^3+27$　　*(2)　a^3-125b^3　　(3)　$128x^3+2y^3$　　(4)　$a^3b^3-c^3$

5　次の式を因数分解せよ。

*(1)　$64x^6-1$　　*(2)　$a^6+26a^3b^3-27b^6$　　(3)　$(x-y)^3+8$

STEP B

6　$(a+b+c)^3$ を展開せよ。

7　次の式を因数分解せよ。

(1)　x^3-3x^2+6x-8　　*(2)　$8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$

ヒント

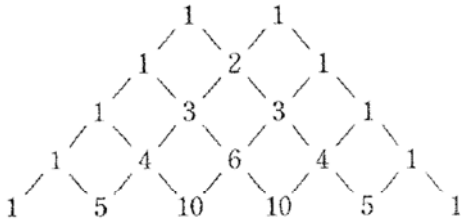
7 ▶ (2)　展開の公式1を利用する。

2 二項定理

1 パスカルの三角形

1　数の配列は左右対称で，各行の両端の数は1である。

2　両端以外の各数は，その左上の数と右上の数の和に等しい。



2 二項定理

1. **二項定理**　$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots$
$\cdots\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}ab^{n-1}+{}_nC_nb^n$

2. $(a+b)^n$ **の展開式の一般項**　${}_nC_ra^{n-r}b^r$　$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$

3. ${}_nC_ra^{n-r}b^r$ の係数 ${}_nC_r$ を **二項係数** という。

4. 二項係数の関係式の証明に，$(a+b)^n$ の展開式を利用することがある。

STEP A

8　次の式の展開式を求めよ。

*(1)　$(x+2)^4$　　(2)　$(a-b)^4$　　*(3)　$(1-a)^5$

9　次の式の展開式を求めよ。

(1)　$(a-b)^7$　　(2)　$(2x+1)^5$　　*(3)　$(x-3)^6$

*(4)　$(3x+2y)^5$　　(5)　$\left(x+\frac{1}{3}\right)^6$　　*(6)　$\left(x-\frac{1}{x}\right)^7$

10　次の式の展開式における，[　] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(3x+1)^5$　　$[x^4]$　　*(2)　$(3x-2)^5$　　$[x^3]$

(3)　$(2-x)^{10}$　　$[x^7]$　　*(4)　$(2x-3y)^7$　　$[x^5y^2]$

11　二項定理の等式を用いて，次の等式を導け。

(1)　${}_nC_0+2{}_nC_1+2^2{}_nC_2+\cdots\cdots+2^n{}_nC_n=3^n$

*(2)　${}_nC_0-\frac{{}_nC_1}{2}+\frac{{}_nC_2}{2^2}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{{}_nC_n}{2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

STEP B

12　次の式の展開式における，[　] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(2x^2-1)^6$　　$[x^6]$　　*(2)　$(2x^3-3x)^5$　　$[x^9]$

13 次の式の展開式における，[　] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $(a+b+c)^6$　　$[ab^2c^3]$　　*(2) $(x+y-3z)^8$　　$[x^5yz^2]$

14 二項定理を用いて，次のことを証明せよ。ただし，n は 2 以上の整数とする。

(1) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n>2$

(2) $x>0$ のとき　$(1+x)^n \geqq 1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2$

例題 1　$\left(2x^2-\dfrac{1}{x}\right)^6$ の展開式における x^3 の項の係数を求めよ。

指針　一般項の式 ${}_nC_r a^{n-r}b^r$ において，$a=2x^2$，$b=-\dfrac{1}{x}$，$n=6$ とおく。

解答　展開式の一般項は　${}_6C_r(2x^2)^{6-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r={}_6C_r\cdot 2^{6-r}(x^2)^{6-r}(-1)^r\left(\dfrac{1}{x}\right)^r$

$={}_6C_r\cdot 2^{6-r}(-1)^r\dfrac{x^{12-2r}}{x^r}$

$\dfrac{x^{12-2r}}{x^r}=x^3$ とすると　$x^{12-2r}=x^3x^r$　よって　$x^{12-2r}=x^{3+r}$

両辺の x の指数を比較して　$12-2r=3+r$　ゆえに　$r=3$

したがって，x^3 の項の係数は　${}_6C_3\cdot 2^{6-3}(-1)^3=20\cdot 8\cdot(-1)=\mathbf{-160}$　答

15 次の式の展開式における，[　] 内のものを求めよ。

(1) $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^7$　[x^2 の項の係数]　　(2) $\left(2x^3-\dfrac{1}{3x^2}\right)^5$　[定数項]

3 整式の割り算

1 整式の割り算

1. 1つの文字について，降べきの順に整理してから，割り算を行う。
2. **割り算の等式** A と B が同じ1つの文字についての整式で，$B \neq 0$ とするとき，

$$A=BQ+R, \quad R \text{は} 0 \text{か}, B \text{より次数の低い整式}$$

を満たす整式 Q と R がただ1通りに定まる。

整式 Q を，A を B で割ったときの **商**，R を **余り** という。

STEP A

21 次の整式 A，B について，A を B で割った商と余りを求めよ。

*(1) $A=a^2+7a+10$, $B=a+2$　　(2) $A=x^2-3x-5$, $B=2x-2$

(3) $A=x^3+5x-6$, $B=x-1$　　(4) $A=4x^3-3x-9$, $B=2x-3$

*(5) $A=1-2a+6a^2+4a^3$, $B=1+2a$

(6) $A=a^3+2a-3$, $B=a^2+2a-1$

***22** 次の整式 A，B について，A を B で割った商と余りを求めよ。また，その結果を $A=BQ+R$ の形に書け。

(1) $A=2x^2-3x+1$, $B=x+1$　(2) $A=2x^3-5x^2+4x-1$, $B=x^2-x+1$

23 *(1) x^2-2x-1 で割ると，商が $2x-3$，余りが $-2x$ である整式を求めよ。

(2) x^2+x+1 で割ると，商が $x-3$，余りが $2x-1$ である整式を求めよ。

24 次のような整式 B を，それぞれ求めよ。

*(1) x^3-x^2+3x+1 を B で割ると，商が $x+1$，余りが $3x-1$

(2) $6x^4+7x^3-9x^2-x+2$ を B で割ると，商が $2x^2+x-3$，余りが $6x-1$

*(3) x^4-6x^2+2x+8 を B で割ると，商が B と一致し，余りが $2x-1$

STEP B

25 次の式 A，B を x についての整式とみて，A を B で割った商と余りを求めよ。

(1) $A=2x^3+7ax^2+5a^2x+6a^3$, $B=x+3a$

*(2) $A=x^3-3ax^2+2a^3$, $B=x^2-2ax-2a^2$

*(3) $A=2x^3-6bx^2+8b^3$, $B=x-b$

(4) $A=x^4+x^2y^2+y^4$, $B=x^2+xy+y^2$

4 分数式とその計算

1 分数式

A，B を整式とするとき，$\dfrac{A}{B}$ の形に表される式を **分数式** という。

2 基本性質と四則計算

1. **基本性質** $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{A}{B}$ （ただし，$C\neq 0$）

2. **乗法，除法** $\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}=\dfrac{AC}{BD}$，$\dfrac{A}{B}\div\dfrac{C}{D}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{D}{C}=\dfrac{AD}{BC}$

3. **加法，減法** $\dfrac{A}{C}+\dfrac{B}{C}=\dfrac{A+B}{C}$，$\dfrac{A}{C}-\dfrac{B}{C}=\dfrac{A-B}{C}$

STEP A

26 次の分数式を約分して簡単にせよ。

*(1) $\dfrac{15a^2b^2}{40a^3b}$　(2) $\dfrac{4a^3+8ab^2}{5a^2}$　*(3) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$

(4) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-x-2}$　*(5) $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(a+b)^2-c^2}$　(6) $\dfrac{a^3-a^2b+ab^2}{a^3+b^3}$

27 次の式を計算せよ。

*(1) $\dfrac{(7a^2b)^2}{21x^3y^3}\times\dfrac{3x^2y}{35(ab^2)^2}$　(2) $\dfrac{3axy^3}{5b^2}\div\dfrac{6ay^3}{10b^2x}$

*(3) $\dfrac{a^2-11a+24}{a^2-6a-16}\times\dfrac{a^2+2a}{a^2-6a+9}$　(4) $\dfrac{x^2-8x-20}{3x^2+5x-2}\times\dfrac{3x^2-31x+10}{x^3-2x^2-80x}$

*(5) $\dfrac{a^2+3a+2}{a^2-5a+6}\div\dfrac{a^2+4a+3}{a^2+a-12}$　(6) $\dfrac{x^2-9}{x+2}\div(x^2-x-6)$

(7) $\dfrac{6x^2-7x-20}{x^2-4}\times\dfrac{x^2-x-2}{6x^2-15x}\div\dfrac{3x^2+7x+4}{x^2+2x}$

28 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{x^2+4}{x-2}-\dfrac{4x}{x-2}$　*(2) $\dfrac{3}{x(3-x)}+\dfrac{x}{3(x-3)}$

(3) $\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}$　*(4) $\dfrac{3x-4}{x^2-3x+2}-\dfrac{3x+2}{x^2-4}$

(5) $\dfrac{2x-1}{x^2-x-6}-\dfrac{2x+1}{x^2+x-12}$　*(6) $\dfrac{x-2}{2x^2-5x+3}+\dfrac{3x-1}{2x^2+x-6}+\dfrac{2x-5}{x^2+x-2}$

29 次の式を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{x-1+\dfrac{2}{x+2}}{x+1-\dfrac{2}{x+2}}$

*(2) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$

STEP B

30 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{2}{1+a}+\dfrac{4}{1+a^2}+\dfrac{2}{1-a}+\dfrac{8}{1+a^4}$

(2) $\dfrac{ca}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{ab}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{bc}{(c-a)(a-b)}$

例題 4 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x-4}{x-3}+\dfrac{x-5}{x-4}$

(2) $\dfrac{1}{(x-1)x}+\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

指針 (1) (分子の次数)≧(分母の次数) の分数式は $\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{(x+1)+1}{x+1}=1+\dfrac{1}{x+1}$ のように，分子の次数を低くする。

(2) 前から順に加えてもよいが，各項を2つの分数式の差に変形する方法もある。

解答 (1) 与式$=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)-\left(1-\dfrac{1}{x-3}\right)+\left(1-\dfrac{1}{x-4}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)+\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-4}\right)$

$=\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{1}{(x-3)(x-4)}=-\dfrac{4(2x-3)}{x(x+1)(x-3)(x-4)}$ 答

(2) 与式$=\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}\right)+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)+\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{3}{(x-1)(x+2)}$ 答

***31** 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{x+2}{x}-\dfrac{x+3}{x+1}-\dfrac{x-5}{x-3}+\dfrac{x-6}{x-4}$

(2) $\dfrac{2}{(a-1)(a+1)}+\dfrac{2}{(a+1)(a+3)}+\dfrac{2}{(a+3)(a+5)}$

***32** $x+\dfrac{1}{x}=4$ のとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$，$x^3+\dfrac{1}{x^3}$ の値を求めよ。

1 (1) 与式$=a^3+3\cdot a^2\cdot 3+3\cdot a\cdot 3^2+3^3$
$=a^3+9a^2+27a+27$

(2) 与式$=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot 1+3\cdot 2x\cdot 1^2-1^3$
$=8x^3-12x^2+6x-1$

(3) 与式$=(4x)^3+3\cdot(4x)^2\cdot y+3\cdot 4x\cdot y^2+y^3$
$=64x^3+48x^2y+12xy^2+y^3$

(4) 与式$=(-5a)^3+3\cdot(-5a)^2\cdot 2b$
$+3\cdot(-5a)\cdot(2b)^2+(2b)^3$
$=-125a^3+150a^2b-60ab^2+8b^3$

(5) 与式$=(ab)^3-3\cdot(ab)^2\cdot 2+3\cdot ab\cdot 2^2-2^3$
$=a^3b^3-6a^2b^2+12ab-8$

(6) 与式$=(2x^2)^3+3\cdot(2x^2)^2\cdot 3y+3\cdot 2x^2\cdot(3y)^2$
$+(3y)^3$
$=8x^6+36x^4y+54x^2y^2+27y^3$

2 (1) 与式$=x^3+4^3=x^3+64$

(2) 与式$=1^3-a^3=1-a^3$

(3) 与式$=(2a)^3+(3b)^3=8a^3+27b^3$

(4) 与式$=(5x)^3-(2y)^3=125x^3-8y^3$

3 (1) 与式$=\{(2x+1)(2x-1)\}^3=(4x^2-1)^3$
$=(4x^2)^3-3\cdot(4x^2)^2\cdot 1+3\cdot 4x^2\cdot 1^2-1^3$
$=64x^6-48x^4+12x^2-1$

(2) 与式$=\{(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)\}^2$
$=\{a^3+(2b)^3\}^2=(a^3+8b^3)^2$
$=a^6+16a^3b^3+64b^6$

(3) 与式$=(x-1)(x^2+x+1)\times(x+1)(x^2-x+1)$
$=(x^3-1^3)(x^3+1^3)=(x^3-1)(x^3+1)$
$=x^6-1$

4 (1) 与式$=(2x)^3+3^3$
$=(2x+3)\{(2x)^2-2x\cdot 3+3^2\}$
$=(2x+3)(4x^2-6x+9)$

(2) 与式$=a^3-(5b)^3=(a-5b)\{a^2+a\cdot 5b+(5b)^2\}$
$=(a-5b)(a^2+5ab+25b^2)$

(3) 与式$=2(64x^3+y^3)=2\{(4x)^3+y^3\}$
$=2(4x+y)\{(4x)^2-4x\cdot y+y^2\}$
$=2(4x+y)(16x^2-4xy+y^2)$

(4) 与式$=(ab)^3-c^3=(ab-c)\{(ab)^2+ab\cdot c+c^2\}$
$=(ab-c)(a^2b^2+abc+c^2)$

5 (1) 与式$=(8x^3+1)(8x^3-1)$
$=(2x+1)(4x^2-2x+1)(2x-1)(4x^2+2x+1)$
$=(2x+1)(2x-1)(4x^2-2x+1)(4x^2+2x+1)$

別解 与式$=(4x^2)^3-1^3$
$=(4x^2-1)(16x^4+4x^2+1)$
$=(4x^2-1)\{(4x^2+1)^2-4x^2\}$
$=(2x+1)(2x-1)(4x^2-2x+1)(4x^2+2x+1)$

(2) 与式$=(a^3-b^3)(a^3+27b^3)$
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)$
$=(a-b)(a+3b)(a^2+ab+b^2)(a^2-3ab+9b^2)$

(3) 与式$=(x-y)^3+2^3$
$=\{(x-y)+2\}\{(x-y)^2-(x-y)\cdot 2+2^2\}$
$=(x-y+2)(x^2-2xy+y^2-2x+2y+4)$

6 $(a+b+c)^3=\{(a+b)+c\}^3$
$=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a^2+2ab+b^2)c$
$+3ac^2+3bc^2+c^3$
$=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3b^2c+3bc^2$
$+3c^2a+3ca^2+6abc$

7 (1) 与式$=x^3-8-(3x^2-6x)$
$=(x-2)(x^2+2x+4)-3x(x-2)$
$=(x-2)\{(x^2+2x+4)-3x\}$
$=(x-2)(x^2-x+4)$

(2) 与式
$=(2a)^3-3\cdot(2a)^2\cdot 3b+3\cdot 2a\cdot(3b)^2-(3b)^3$
$=(2a-3b)^3$

別解 与式$=8a^3-27b^3-(36a^2b-54ab^2)$
$=(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)-18ab(2a-3b)$
$=(2a-3b)\{(4a^2+6ab+9b^2)-18ab\}$
$=(2a-3b)(4a^2-12ab+9b^2)$
$=(2a-3b)(2a-3b)^2=(2a-3b)^3$

8 (1) $(x+2)^4$
$={}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3\cdot 2+{}_4C_2x^2\cdot 2^2+{}_4C_3x\cdot 2^3$
$+{}_4C_4\cdot 2^4$
$=x^4+8x^3+24x^2+32x+16$

(2) $(a-b)^4$
$={}_4C_0a^4+{}_4C_1a^3(-b)+{}_4C_2a^2(-b)^2$
$+{}_4C_3a(-b)^3+{}_4C_4(-b)^4$
$=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$

(3) $(1-a)^5$
$={}_5C_0\cdot 1^5+{}_5C_1\cdot 1^4(-a)+{}_5C_2\cdot 1^3(-a)^2$
$+{}_5C_3\cdot 1^2(-a)^3+{}_5C_4\cdot 1(-a)^4+{}_5C_5(-a)^5$
$=1-5a+10a^2-10a^3+5a^4-a^5$

9 (1) $(a-b)^7$
$={}_7C_0a^7+{}_7C_1a^6(-b)+{}_7C_2a^5(-b)^2$
$+{}_7C_3a^4(-b)^3+{}_7C_4a^3(-b)^4$
$+{}_7C_5a^2(-b)^5+{}_7C_6a(-b)^6+{}_7C_7(-b)^7$
$=a^7-7a^6b+21a^5b^2-35a^4b^3+35a^3b^4$
$-21a^2b^5+7ab^6-b^7$

(2) $(2x+1)^5$
$={}_5C_0(2x)^5+{}_5C_1(2x)^4\cdot 1+{}_5C_2(2x)^3\cdot 1^2$
$+{}_5C_3(2x)^2\cdot 1^3+{}_5C_4(2x)\cdot 1^4+{}_5C_5\cdot 1^5$
$=32x^5+80x^4+80x^3+40x^2+10x+1$

(3) $(x-3)^6$
$={}_6C_0x^6+{}_6C_1x^5(-3)+{}_6C_2x^4(-3)^2+{}_6C_3x^3(-3)^3$
$+{}_6C_4x^2(-3)^4+{}_6C_5x(-3)^5+{}_6C_6(-3)^6$
$=x^6-18x^5+135x^4-540x^3+1215x^2$
$-1458x+729$

(4) $(3x+2y)^5$
$={}_5C_0(3x)^5+{}_5C_1(3x)^4(2y)+{}_5C_2(3x)^3(2y)^2$
$+{}_5C_3(3x)^2(2y)^3+{}_5C_4(3x)(2y)^4+{}_5C_5(2y)^5$
$=243x^5+810x^4y+1080x^3y^2+720x^2y^3$
$+240xy^4+32y^5$

(5) $\left(x+\frac{1}{3}\right)^6$
$={}_6C_0x^6+{}_6C_1x^5\cdot\frac{1}{3}+{}_6C_2x^4\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_6C_3x^3\left(\frac{1}{3}\right)^3$
$+{}_6C_4x^2\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_6C_5x\left(\frac{1}{3}\right)^5+{}_6C_6\left(\frac{1}{3}\right)^6$
$=x^6+2x^5+\frac{5}{3}x^4+\frac{20}{27}x^3+\frac{5}{27}x^2+\frac{2}{81}x+\frac{1}{729}$

(6) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^7$
$={}_7C_0x^7+{}_7C_1x^6\left(-\frac{1}{x}\right)+{}_7C_2x^5\left(-\frac{1}{x}\right)^2$
$+{}_7C_3x^4\left(-\frac{1}{x}\right)^3+{}_7C_4x^3\left(-\frac{1}{x}\right)^4+{}_7C_5x^2\left(-\frac{1}{x}\right)^5$
$+{}_7C_6x\left(-\frac{1}{x}\right)^6+{}_7C_7\left(-\frac{1}{x}\right)^7$
$=x^7-7x^5+21x^3-35x+\frac{35}{x}-\frac{21}{x^3}+\frac{7}{x^5}-\frac{1}{x^7}$

10 (1) $(3x+1)^5$ の展開式の一般項は
${}_5C_r(3x)^{5-r}\cdot 1^r={}_5C_r\cdot 3^{5-r}x^{5-r}$
x^4 の項は $r=1$ のときで，その係数は
${}_5C_1\cdot 3^4=5\cdot 81=405$

(2) $(3x-2)^5$ の展開式の一般項は
${}_5C_r(3x)^{5-r}(-2)^r={}_5C_r\cdot 3^{5-r}(-2)^rx^{5-r}$
x^3 の項は $r=2$ のときで，その係数は
${}_5C_2\cdot 3^3(-2)^2=10\cdot 27\cdot 4=1080$

(3) $(2-x)^{10}$ の展開式の一般項は
${}_{10}C_r\cdot 2^{10-r}(-x)^r={}_{10}C_r\cdot 2^{10-r}(-1)^rx^r$
x^7 の項は $r=7$ のときで，その係数は
${}_{10}C_7\cdot 2^3(-1)^7=120\cdot 8\cdot(-1)=-960$

(4) $(2x-3y)^7$ の展開式の一般項は
${}_7C_r(2x)^{7-r}(-3y)^r={}_7C_r\cdot 2^{7-r}(-3)^rx^{7-r}y^r$
x^5y^2 の項は $r=2$ のときで，その係数は
${}_7C_2\cdot 2^5(-3)^2=21\cdot 32\cdot 9=6048$

11 二項定理により
$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n$
$\cdots\cdots$①

(1) ①に $x=2$ を代入すると
$(1+2)^n={}_nC_0+{}_nC_1\cdot 2+{}_nC_2\cdot 2^2$
$+\cdots\cdots+{}_nC_n\cdot 2^n$
よって
${}_nC_0+2{}_nC_1+2^2{}_nC_2+\cdots\cdots+2^n{}_nC_n=3^n$

(2) ①に $x=-\frac{1}{2}$ を代入すると

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)^n={}_nC_0+{}_nC_1\left(-\frac{1}{2}\right)+{}_nC_2\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+{}_nC_n\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

よって

$${}_nC_0-\frac{{}_nC_1}{2}+\frac{{}_nC_2}{2^2}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{{}_nC_n}{2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

12 (1) $(2x^2-1)^6$ の展開式の一般項は

$${}_6C_r(2x^2)^{6-r}(-1)^r={}_6C_r\cdot 2^{6-r}(-1)^r x^{12-2r}$$

x^6 の項は $r=3$ のときで，その係数は

$${}_6C_3\cdot 2^3(-1)^3=20\cdot 8\cdot(-1)=-160$$

(2) $(2x^3-3x)^5$ の展開式の一般項は

$${}_5C_r(2x^3)^{5-r}(-3x)^r={}_5C_r\cdot 2^{5-r}(-3)^r x^{15-2r}$$

x^9 の項は $r=3$ のときで，その係数は

$${}_5C_3\cdot 2^2(-3)^3=10\cdot 4\cdot(-27)=-1080$$

13 (1) $\{(a+b)+c\}^6$ の展開式において，c^3 を含む項は　${}_6C_3(a+b)^3c^3$

また，$(a+b)^3$ の展開式において，ab^2 の項の係数は　${}_3C_2$

よって，ab^2c^3 の項の係数は

$${}_6C_3\times{}_3C_2=20\cdot 3=60$$

(2) $\{(x+y)-3z\}^8$ の展開式において，z^2 を含む項は　${}_8C_2(x+y)^6(-3z)^2=9\cdot{}_8C_2(x+y)^6z^2$

また，$(x+y)^6$ の展開式において，x^5y の項の係数は　${}_6C_1$

よって，x^5yz^2 の項の係数は

$$9\cdot{}_8C_2\times{}_6C_1=9\cdot 28\cdot 6=1512$$

14 二項定理により

$$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_nC_nb^n\quad\cdots\cdots①$$

(1) ①で $a=1$，$b=\frac{1}{n}$ とすると

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n={}_nC_0+{}_nC_1\frac{1}{n}+{}_nC_2\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots+{}_nC_n\frac{1}{n^n}$$

${}_nC_r>0$，$\frac{1}{n}>0$ であるから，$n\geqq 2$ のとき

$${}_nC_2\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots+{}_nC_n\frac{1}{n^n}>0$$

よって

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>{}_nC_0+{}_nC_1\frac{1}{n}=1+n\cdot\frac{1}{n}=2$$

(2) ①で $a=1$，$b=x$ とすると

$$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+{}_nC_3x^3+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n\quad\cdots\cdots②$$

[1] $n\geqq 3$ のとき

${}_nC_r>0$，$x>0$ であるから

$${}_nC_3x^3+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n>0$$

よって，②から

$$(1+x)^n>{}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2$$

したがって　$(1+x)^n>1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2$

[2] $n=2$ のとき

②から　$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2$

よって　$(1+x)^n=1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2$

[1]，[2] から，$n\geqq 2$ のとき

$$(1+x)^n\geqq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$$

15 (1) 展開式の一般項は

$${}_7C_r(x^2)^{7-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_7C_r\frac{x^{14-2r}}{x^r}$$

$\dfrac{x^{14-2r}}{x^r}=x^2$ とすると　$x^{14-2r}=x^2x^r$

よって　$x^{14-2r}=x^{2+r}$

両辺の x の指数を比較して　$14-2r=2+r$

ゆえに　$r=4$

したがって，x^2 の項の係数は　${}_7C_4=35$

(2) 展開式の一般項は

$${}_5C_r(2x^3)^{5-r}\left(-\frac{1}{3x^2}\right)^r={}_5C_r\cdot 2^{5-r}(x^3)^{5-r}\left(-\frac{1}{3}\right)^r\left(\frac{1}{x^2}\right)^r={}_5C_r\cdot 2^{5-r}\left(-\frac{1}{3}\right)^r\frac{x^{15-3r}}{x^{2r}}$$

これが定数項のとき　$\dfrac{x^{15-3r}}{x^{2r}}=1$

よって　$x^{15-3r}=x^{2r}$

両辺の x の指数を比較して　$15-3r=2r$

ゆえに　$r=3$

したがって，定数項は

$${}_5C_3\cdot 2^2\left(-\frac{1}{3}\right)^3=10\cdot 4\cdot\left(-\frac{1}{27}\right)=-\frac{40}{27}$$

16 $11^{11}=(10+1)^{11}$

$$={}_{11}C_0\cdot 10^{11}+{}_{11}C_1\cdot 10^{10}\cdot 1+{}_{11}C_2\cdot 10^9\cdot 1^2+\cdots\cdots+{}_{11}C_9\cdot 10^2\cdot 1^9+{}_{11}C_{10}\cdot 10\cdot 1^{10}+{}_{11}C_{11}\cdot 1^{11}$$

$$=10^2({}_{11}C_0\cdot 10^9+{}_{11}C_1\cdot 10^8+{}_{11}C_2\cdot 10^7+\cdots\cdots+{}_{11}C_9)+10+1$$

$$=10^2({}_{11}C_0\cdot 10^9+{}_{11}C_1\cdot 10^8+{}_{11}C_2\cdot 10^7+\cdots\cdots+{}_{11}C_9+1)+11$$

${}_{11}C_0\cdot 10^9+{}_{11}C_1\cdot 10^8+{}_{11}C_2\cdot 10^7+\cdots\cdots+{}_{11}C_9+1$ は整数であるから，求める余りは　11

17 $(1+x)^n(x+1)^n$

$$=({}_nC_0+{}_nC_1x+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n)\times({}_nC_0x^n+{}_nC_1x^{n-1}+\cdots\cdots+{}_nC_n)$$

$$={}_nC_0({}_nC_0x^n+{}_nC_1x^{n-1}+\cdots\cdots+{}_nC_n)+{}_nC_1x({}_nC_0x^n+{}_nC_1x^{n-1}+\cdots\cdots+{}_nC_n)+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n({}_nC_0x^n+{}_nC_1x^{n-1}+\cdots\cdots+{}_nC_n)$$

$(1+x)^n(x+1)^n$ の展開式において，x^n の項の係数は　${}_nC_0^2+{}_nC_1^2+\cdots\cdots+{}_nC_n^2$

また，$(1+x)^{2n}$ の展開式の一般項は　${}_{2n}C_rx^r$

よって，x^n の項の係数は　${}_{2n}C_n$

両辺の x^n の項の係数は等しいから

$${}_nC_0^2+{}_nC_1^2+\cdots\cdots+{}_nC_n^2={}_{2n}C_n$$

18 (1) $k\,{}_nC_k=k\cdot\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$$=k\cdot\frac{n\cdot(n-1)!}{k\cdot(k-1)!(n-k)!}$$

$$=n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\{(n-1)-(k-1)\}!}$$

$$=n\,{}_{n-1}C_{k-1}$$

(2) (1)で示した等式を利用すると

$${}_nC_1+2\,{}_nC_2+3\,{}_nC_3+\cdots\cdots+n\,{}_nC_n$$

$$=n+n\,{}_{n-1}C_1+n\,{}_{n-1}C_2+\cdots\cdots+n\,{}_{n-1}C_{n-1}$$

$$=n({}_{n-1}C_0+{}_{n-1}C_1+{}_{n-1}C_2+\cdots\cdots+{}_{n-1}C_{n-1})$$

$$=n(1+1)^{n-1}=n\cdot 2^{n-1}$$

19 (1) x^2yz^3 の項の係数は　$\dfrac{6!}{2!1!3!}=60$

(2) x^3y^2z の項は　$\dfrac{6!}{3!2!1!}x^3(2y)^2(3z)^1$

よって，その係数は　$\dfrac{6!}{3!2!1!}\cdot 2^2\cdot 3^1=720$

(3) $x^2y^2z^3$ の項は　$\dfrac{7!}{2!2!3!}(2x)^2(3y)^2(-z)^3$

よって，その係数は

$$\frac{7!}{2!2!3!}\cdot 2^2\cdot 3^2(-1)^3=-7560$$

(4) x^5z^3 の項は　$\dfrac{8!}{5!3!}x^5(-3z)^3$

よって，その係数は　$\dfrac{8!}{5!3!}(-3)^3=-1512$

20 (1) 展開式の一般項は

$$\frac{4!}{p!q!r!}(x^2)^p(-x)^q\cdot 2^r=\frac{4!}{p!q!r!}(-1)^q\cdot 2^r x^{2p+q}$$

ただし　$p+q+r=4$，$p\geqq 0$，$q\geqq 0$，$r\geqq 0$

x^5 の項は $2p+q=5$ のときで，$p\geqq 0$，$q\geqq 0$ であるから　$p=0,\ 1,\ 2$

よって，$2p+q=5$ と $p+q+r=4$ を満たす負でない整数 p，q，r の組は

$$(p,\ q,\ r)=(1,\ 3,\ 0),\ (2,\ 1,\ 1)$$

したがって，求める係数は

$$\frac{4!}{1!3!0!}(-1)^3\cdot 2^0+\frac{4!}{2!1!1!}(-1)^1\cdot 2^1=-28$$

(2) 展開式の一般項は

$$\frac{10!}{p!q!r!}\cdot 1^p(2x)^q(-x^2)^r=\frac{10!}{p!q!r!}\cdot 2^q(-1)^r x^{q+2r}$$

ただし　$p+q+r=10$，$p\geqq 0$，$q\geqq 0$，$r\geqq 0$

x^3 の項は $q+2r=3$ のときで，$q\geqq 0$，$r\geqq 0$ であるから　$r=0,\ 1$

よって，$q+2r=3$ と $p+q+r=10$ を満たす負でない整数 p，q，r の組は

$$(p,\ q,\ r)=(7,\ 3,\ 0),\ (8,\ 1,\ 1)$$

したがって，求める係数は

$$\frac{10!}{7!3!0!}\cdot 2^3(-1)^0+\frac{10!}{8!1!1!}\cdot 2^1(-1)^1=780$$

21 (1)

$$\begin{array}{r)l} a+5 & \\ a+2 & a^2+7a+10 \\ & a^2+2a \\ \hline & 5a+10 \\ & 5a+10 \\ \hline & 0 \end{array}$$

よって　商 $a+5$，余り 0

(2)

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{2}x-1 \\ \hline 2x-2 & x^2-3x-5 \\ & x^2-x \\ \hline & -2x-5 \\ & -2x+2 \\ \hline & -7 \end{array}$$

よって　商 $\frac{1}{2}x-1$，余り -7

(3)

$$\begin{array}{r|l} & x^2+x+6 \\ \hline x-1 & x^3+5x-6 \\ & x^3-x^2 \\ \hline & x^2+5x \\ & x^2-x \\ \hline & 6x-6 \\ & 6x-6 \\ \hline & 0 \end{array}$$

よって　商 x^2+x+6，余り 0

(4)

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2+3x+3 \\ \hline 2x-3 & 4x^3-3x-9 \\ & 4x^3-6x^2 \\ \hline & 6x^2-3x \\ & 6x^2-9x \\ \hline & 6x-9 \\ & 6x-9 \\ \hline & 0 \end{array}$$

よって　商 $2x^2+3x+3$，余り 0

(5)

$$\begin{array}{r|l} & 2a^2+2a-2 \\ \hline 2a+1 & 4a^3+6a^2-2a+1 \\ & 4a^3+2a^2 \\ \hline & 4a^2-2a \\ & 4a^2+2a \\ \hline & -4a+1 \\ & -4a-2 \\ \hline & 3 \end{array}$$

よって　商 $2a^2+2a-2$，余り 3

(6)

$$\begin{array}{r|l} & a-2 \\ \hline a^2+2a-1 & a^3+2a-3 \\ & a^3+2a^2-a \\ \hline & -2a^2+3a-3 \\ & -2a^2-4a+2 \\ \hline & 7a-5 \end{array}$$

よって　商 $a-2$，余り $7a-5$

22 (1)

$$\begin{array}{r|l} & 2x-5 \\ \hline x+1 & 2x^2-3x+1 \\ & 2x^2+2x \\ \hline & -5x+1 \\ & -5x-5 \\ \hline & 6 \end{array}$$

よって　商 $2x-5$，余り 6

また　$2x^2-3x+1=(x+1)(2x-5)+6$

(2)

$$\begin{array}{r|l} & 2x-3 \\ \hline x^2-x+1 & 2x^3-5x^2+4x-1 \\ & 2x^3-2x^2+2x \\ \hline & -3x^2+2x-1 \\ & -3x^2+3x-3 \\ \hline & -x+2 \end{array}$$

よって　商 $2x-3$，余り $-x+2$

また

$2x^3-5x^2+4x-1=(x^2-x+1)(2x-3)-x+2$

23 (1) 求める整式は　$(x^2-2x-1)(2x-3)-2x$

よって　$2x^3-7x^2+2x+3$

(2) 求める整式は　$(x^2+x+1)(x-3)+2x-1$

よって　x^3-2x^2-4

24 (1) 条件から，次の等式が成り立つ。

$x^3-x^2+3x+1=B\times(x+1)+(3x-1)$

ゆえに

$x^3-x^2+2=B\times(x+1)$

よって，x^3-x^2+2 は $x+1$ で割り切れて，その商が B である。

右の計算により

$B=x^2-2x+2$

$$\begin{array}{r|l} & x^2-2x+2 \\ \hline x+1 & x^3-x^2+2 \\ & x^3+x^2 \\ \hline & -2x^2 \\ & -2x^2-2x \\ \hline & 2x+2 \\ & 2x+2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

(2) 条件から，次の等式が成り立つ。

$6x^4+7x^3-9x^2-x+2$

$=B\times(2x^2+x-3)+(6x-1)$

ゆえに

$6x^4+7x^3-9x^2-7x+3=B\times(2x^2+x-3)$

よって，$6x^4+7x^3-9x^2-7x+3$ は

$2x^2+x-3$ で割り切れて，その商が B である。

下の計算により　$B=3x^2+2x-1$

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2+2x-1 \\ \hline 2x^2+x-3 & 6x^4+7x^3-9x^2-7x+3 \\ & 6x^4+3x^3-9x^2 \\ \hline & 4x^3-7x \\ & 4x^3+2x^2-6x \\ \hline & -2x^2-x+3 \\ & -2x^2-x+3 \\ \hline & 0 \end{array}$$

(3) 条件から，次の等式が成り立つ。

$x^4-6x^2+2x+8=B^2+2x-1$

よって　$B^2=x^4-6x^2+9$

すなわち　$B^2=(x^2-3)^2$

ゆえに　$B=x^2-3,\ -x^2+3$

25 (1)

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2+ax+2a^2 \\ \hline x+3a & 2x^3+7ax^2+5a^2x+6a^3 \\ & 2x^3+6ax^2 \\ \hline & ax^2+5a^2x \\ & ax^2+3a^2x \\ \hline & 2a^2x+6a^3 \\ & 2a^2x+6a^3 \\ \hline & 0 \end{array}$$

よって　商 $2x^2+ax+2a^2$，余り 0

(2)

$$\begin{array}{r|l} & x-a \\ \hline x^2-2ax-2a^2 & x^3-3ax^2+2a^3 \\ & x^3-2ax^2-2a^2x \\ \hline & -ax^2+2a^2x+2a^3 \\ & -ax^2+2a^2x+2a^3 \\ \hline & 0 \end{array}$$

よって　商 $x-a$，余り 0

(3)

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2-4bx-4b^2 \\ \hline x-b & 2x^3-6bx^2+8b^3 \\ & 2x^3-2bx^2 \\ \hline & -4bx^2 \\ & -4bx^2+4b^2x \\ \hline & -4b^2x+8b^3 \\ & -4b^2x+4b^3 \\ \hline & 4b^3 \end{array}$$

よって　商 $2x^2-4bx-4b^2$，余り $4b^3$

(4)

$$\begin{array}{r|l} & x^2-xy+y^2 \\ \hline x^2+xy+y^2 & x^4+x^2y^2+y^4 \\ & x^4+x^3y+x^2y^2 \\ \hline & -x^3y \\ & -x^3y-x^2y^2-xy^3 \\ \hline & x^2y^2+xy^3+y^4 \\ & x^2y^2+xy^3+y^4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

よって　商 x^2-xy+y^2，余り 0

26 (1) 与式 $=\dfrac{5a^2b\cdot 3b}{5a^2b\cdot 8a}=\dfrac{3b}{8a}$

(2) 与式 $=\dfrac{a(4a^2+8b^2)}{a\cdot 5a}=\dfrac{4a^2+8b^2}{5a}$

(3) 与式 $=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{x-2}{x-3}$

(4) 与式 $=\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-2)}=\dfrac{x-3}{x-2}$

(5) 与式 $=\dfrac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+b+c)(a+b-c)}=\dfrac{a-b+c}{a+b+c}$

(6) 与式 $=\dfrac{a(a^2-ab+b^2)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}=\dfrac{a}{a+b}$

27 (1) 与式 $=\dfrac{49a^4b^2}{21x^3y^3}\times\dfrac{3x^2y}{35a^2b^4}=\dfrac{a^2\cdot}{5b^2xy^2}$

(2) 与式 $=\dfrac{3axy^3}{5b^2}\times\dfrac{10b^2x}{6ay^3}=x^2$

(3) 与式 $=\dfrac{(a-3)(a-8)}{(a+2)(a-8)}\times\dfrac{a(a+2)}{(a-3)^2}=\dfrac{a}{a-3}$

(4) 与式 $=\dfrac{(x+2)(x-10)}{(3x-1)(x+2)}\times\dfrac{(3x-1)(x-10)}{x(x+8)(x-10)}$

$=\dfrac{x-10}{x(x+8)}$

(5) 与式$=\dfrac{(a+1)(a+2)}{(a-2)(a-3)}\times\dfrac{(a-3)(a+4)}{(a+1)(a+3)}$

$=\dfrac{(a+2)(a+4)}{(a-2)(a+3)}$

(6) 与式$=\dfrac{(x+3)(x-3)}{x+2}\times\dfrac{1}{(x+2)(x-3)}$

$=\dfrac{x+3}{(x+2)^2}$

(7) 与式$=\dfrac{(2x-5)(3x+4)}{(x+2)(x-2)}\times\dfrac{(x+1)(x-2)}{3x(2x-5)}$

$\times\dfrac{x(x+2)}{(x+1)(3x+4)}=\dfrac{1}{3}$

28 (1) 与式$=\dfrac{x^2+4-4x}{x-2}=\dfrac{(x-2)^2}{x-2}=x-2$

(2) 与式$=\dfrac{3(-3)+x^2}{3x(x-3)}=\dfrac{(x+3)(x-3)}{3x(x-3)}=\dfrac{x+3}{3x}$

(3) 与式$=\dfrac{1}{x(x-1)}+\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

$=\dfrac{(x-2)+x}{x(x-1)(x-2)}=\dfrac{2(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$

$=\dfrac{2}{x(x-2)}$

(4) 与式$=\dfrac{3x-4}{(x-1)(x-2)}-\dfrac{3x+2}{(x+2)(x-2)}$

$=\dfrac{(3x-4)(x+2)-(3x+2)(x-1)}{(x-1)(x-2)(x+2)}$

$=\dfrac{(3x^2+2x-8)-(3x^2-x-2)}{(x-1)(x-2)(x+2)}$

$=\dfrac{3(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+2)}=\dfrac{3}{(x-1)(x+2)}$

(5) 与式$=\dfrac{2x-1}{(x+2)(x-3)}-\dfrac{2x+1}{(x+4)(x-3)}$

$=\dfrac{(2x-1)(x+4)-(2x+1)(x+2)}{(x+2)(x+4)(x-3)}$

$=\dfrac{(2x^2+7x-4)-(2x^2+5x+2)}{(x+2)(x+4)(x-3)}$

$=\dfrac{2(x-3)}{(x+2)(x+4)(x-3)}=\dfrac{2}{(x+2)(x+4)}$

(6) 与式$=\dfrac{x-2}{(x-1)(2x-3)}+\dfrac{3x-1}{(x+2)(2x-3)}$

$+\dfrac{2x-5}{(x+2)(x-1)}$

分母$=(x+2)(x-1)(2x-3)$ とすると

分子$=(x-2)(x+2)+(3x-1)(x-1)$

$+(2x-5)(2x-3)$

$=(x^2-4)+(3x^2-4x+1)+(4x^2-16x+15)$

$=8x^2-20x+12=4(x-1)(2x-3)$

ゆえに

与式$=\dfrac{4(x-1)(2x-3)}{(x+2)(x-1)(2x-3)}=\dfrac{4}{x+2}$

29 (1) 分母・分子に $x+2$ を掛けると

与式$=\dfrac{(x-1)(x+2)+2}{(x+1)(x+2)-2}=\dfrac{x^2+x}{x^2+3x}$

$=\dfrac{x(x+1)}{x(x+3)}=\dfrac{x+1}{x+3}$

別解 分母$=\dfrac{(x+1)(x+2)-2}{x+2}=\dfrac{x(x+3)}{x+2}$,

分子$=\dfrac{(x-1)(x+2)+2}{x+2}=\dfrac{x(x+1)}{x+2}$

よって

与式$=\dfrac{x(x+1)}{x+2}\div\dfrac{x(x+3)}{x+2}$

$=\dfrac{x(x+1)}{x+2}\times\dfrac{x+2}{x(x+3)}=\dfrac{x+1}{x+3}$

(2) 与式$=1-\dfrac{1\times(1-x)}{\left(1-\dfrac{1}{1-x}\right)\times(1-x)}$

$=1-\dfrac{1-x}{(1-x)-1}=1-\dfrac{x-1}{x}$

$=\dfrac{x-(x-1)}{x}=\dfrac{1}{x}$

30 (1) 与式

$=\left(\dfrac{2}{1+a}+\dfrac{2}{1-a}\right)+\dfrac{4}{1+a^2}+\dfrac{8}{1+a^4}$

$=\dfrac{2(1-a)+2(1+a)}{(1+a)(1-a)}+\dfrac{4}{1+a^2}+\dfrac{8}{1+a^4}$

$=\left(\dfrac{4}{1-a^2}+\dfrac{4}{1+a^2}\right)+\dfrac{8}{1+a^4}$

$=\dfrac{4(1+a^2)+4(1-a^2)}{(1-a^2)(1+a^2)}+\dfrac{8}{1+a^4}$

$=\dfrac{8}{1-a^4}+\dfrac{8}{1+a^4}=\dfrac{16}{1-a^8}$

(2) 与式$=\dfrac{ca(c-a)+ab(a-b)+bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

分子$=c^2a-ca^2+a^2b-ab^2+bc(b-c)$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

よって 与式$=\dfrac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=-1$

31 (1) 与式

$=\left(1+\dfrac{2}{x}\right)-\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)-\left(1-\dfrac{2}{x-3}\right)$

$+\left(1-\dfrac{2}{x-4}\right)$

$=\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x+1}\right)+\left(\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{2}{x-4}\right)$

$=\dfrac{2}{x(x+1)}-\dfrac{2}{(x-3)(x-4)}$

$=-\dfrac{8(2x-3)}{x(x+1)(x-3)(x-4)}$

(2) 与式$=\left(\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{1}{a+1}\right)+\left(\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{1}{a+3}\right)$

$+\left(\dfrac{1}{a+3}-\dfrac{1}{a+5}\right)$

$=\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{1}{a+5}=\dfrac{6}{(a-1)(a+5)}$

32 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}=4^2-2=14$

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=4^3-3\cdot4=52$