実施日▶　　月　　日

# 40 微分の応用①

テキスト P.206 ~ 207

| クラス | 氏名 | 得点 |
|---|---|---|
| | | /50 |

**1** $f(x)=x^3-3x$ とする．次の問に答えよ．　［各10点×3］

(1) 増減表を作れ．

(2) $y=f(x)$ のグラフを描き，$x$ 軸との共有点の個数を求めよ．

(3) $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ が3個の共有点をもつとき，$a$ の値の範囲を求めよ．

**2** 区間 $x \geqq 0$ で，不等式 $x^3-2x^2 \geqq x^2-4$ が成り立つことを示せ．　［20点］

実施日▶　　月　　日

# 41 微分の応用②

テキスト P.208 ～ 211

| クラス | 氏名 | 得点 |
|---|---|---|
| | | ／50 |

**1** $f(x)=x^3-x^2$ とする．関数 $y=f(x)$ のグラフの接線のうち，次の点を通るものの本数を求めよ．　［各10点×2］

(1) （3，0）

(2) （1，−4）

**2** 次の問いに答えよ．　［各15点×2］

(1) 関数 $f(x)=x^3$，$a$ を実数とする．$y=f(x)$ のグラフの接線のうち，点（1，$a$）を通るものの本数を求めよ．

(2) 関数 $f(x)=x^3+3x$，$a$ を実数とする．$y=f(x)$ のグラフの接線のうち，点（2，$a$）を通るものの本数を求めよ．

実施日▶　　月　　日

# 40 微分の応用①

テキスト P.206 ～ 207

| クラス | 氏名 | 得点 |
|---|---|---|
| | | /50 |

**1** $f(x)=x^3-3x$ とする．次の問に答えよ．　［各10点×3］

(1) 増減表を作れ．

$f(x)=3x^2-3$

$=3(x^2-1)$

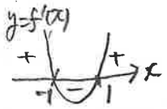
$=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ のとき $x=\pm1$

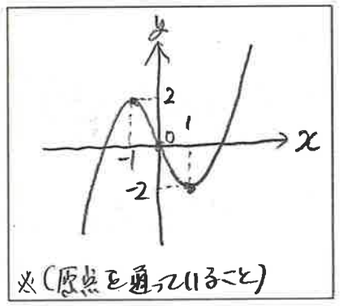
$f(-1)=-1+3=2$

$f(1)=1-3=-2$

| $x$ | … | $-1$ | … | $1$ | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 2 | ↘ | $-2$ | ↗ |



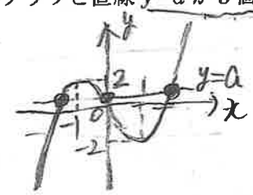

(2) $y=f(x)$ のグラフを描き，$x$ 軸との共有点の個数を求めよ．




必（原点を通っていること）

3個

(3) $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ が3個の共有点をもつとき，$a$ の値の範囲を求めよ．




$-2<y<2$ の間

つまり

$-2<a<2$

$-2<a<2$

**2** 区間 $x\geqq0$ で，不等式 $x^3-2x^2\geqq x^2-4$ が成り立つことを示せ．　［20点］

$f(x)=(x^3-2x^2)-(x^2+4)$

$=x^3-3x^2+4$ とおく

$x\geqq0$ で $f(x)\geqq0$ を示せばよい。

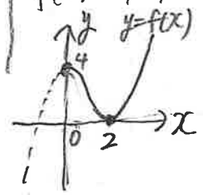
$f'(x)=3x^2-6x$

$=3x(x-2)$

$f'(x)=0$ で $x=0,2$

| $x$ | … | 0 | … | 2 | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 4 | ↘ | 0 | ↗ |

$f(0)=4$，$f(2)=0$




よって $x\geqq0$ で

$f(x)\geqq0$ で

あり，題意は示された。

実施日▶　　月　　日

# 41 微分の応用②

テキスト P.208～211

| クラス | 氏名 | 得点 |
|---|---|---|
| | | /50 |

**1** $f(x)=x^3-x^2$ とする．関数 $y=f(x)$ のグラフの接線のうち，次の点を通るものの本数を求めよ．　［各10点×2］

(1) $(3, 0)$

3本

(2) $(1, -4)$

1本

**2** 次の問いに答えよ．　［各15点×2］

(1) 関数 $f(x)=x^3$，$a$ を実数とする．$y=f(x)$ のグラフの接線のうち，点$(1, a)$を通るものの本数を求めよ．

- $0<a<1$ のとき　3本
- $a=0, 1$ のとき　2本
- $a<0, 1<a$ のとき　1本

(2) 関数 $f(x)=x^3+3x$，$a$ を実数とする．$y=f(x)$ のグラフの接線のうち，点$(2, a)$を通るものの本数を求めよ．

$f'(x)=3x^2+3$

$y=f(x)$ 上の接点を $P(t, f(t))$ とする

$f'(t)=3t^2+3$，$f(t)=t^3+3t$ より接線の式は $y=(3t^2+3)x-2t^3$ と表せる

これが $(2, a)$ を通るので $a=6t^2+6-2t^3$

$g(t)=-2t^3+6t^2+6$ とすると

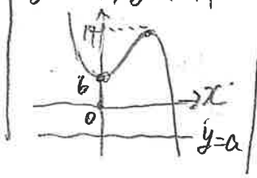
$g'(t)=-6t^2+12t$

$=-6t(t-2)$

$g'(t)=0$ より　$t=0, 2$

| $t$ | | 0 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | − | 0 | + | 0 | − |
| $g(t)$ | ↘ | 6 | ↗ | 14 | ↘ |

$g(0)=6$，$g(2)=14$




$y=g(t)$ と $y=a$ のグラフの交点の個数が，実数 $t$ の個数になる。

- $6<a<14$ のとき　3本
- $a=6, 14$ のとき　2本
- $0<a, 14<a$ のとき　1本



**1** $f(x)=3x^2-2x$

$y=f(x)$ 上の接点 $P(t, f(t))$ とすると，

接線の傾きは $f'(t)=3t^2-2t$

接点の座標は，$f(t)=t^3-t^2$ より $(t, t^3-t^2)$ で

接線の式は，$y=(3t^2-2t)(x-t)+t^3-t^2$

$y=(3t^2-2t)x-3t^3+2t^2+t^3-t^2$

$y=(3t^2-2t)x-2t^3+t^2$ …$l$ とおける．

(1) $l$ が $(3, 0)$ を通るとすると

$0=3(3t^2-2t)-2t^3+t^2$

$\therefore -2t^3+10t^2-6t=0$

$t^3-5t^2+3t=0$

$t(t^2-5t+3)=0$

これをみたす実数 $t$ が接点の個数になり，引ける接線の本数になる。

$t^2-5t+3=0$ の実数解の個数は

判別式 $D=25-12>0$ より 2個ある

よってこの方程式の実数解は $t=0$ とあわせて3個存在する。

(2) $l$ が $(1, -4)$ を通るとすると

$-4=(3t^2-2t)-2t^3+t^2$

$\therefore -2t^3+4t^2-2t+4=0$

$t^3-2t^2+t-2=0$

$g(t)=t^3-2t^2+t-2$ とすると

$g'(t)=3t^2-4t+1$

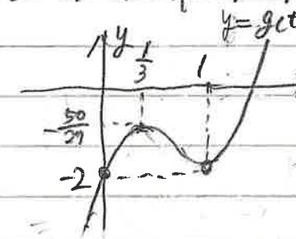
$=(3t-1)(t-1)$ で

$g'(t)=0$ で $t=\frac{1}{3}, 1$

| $t$ | | $\frac{1}{3}$ | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $g(t)$ | ↗ | $-\frac{50}{27}$ | ↘ | −2 | ↗ |

・$g(\frac{1}{3})=-\frac{50}{27}$

・$g(1)=-2$




よって $g(t)=0$ の実数解は1つのみ存在するとわかる。

**2** (1) $f'(x)=3x^2$

$y=f(x)$ 上の接点を $P(t, f(t))$ とする

$f'(t)=3t^2$，$f(t)=t^3$ より

接線の式は $y=3t^2(x-t)+t^3$

$y=3t^2x-2t^3$ となる

これが $(1, a)$ を通るので

$a=3t^2-2t^3$ をみたす実数 $t$ が接点の個数であり，接線の本数になる。

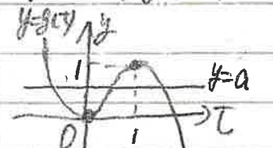
$g(t)=-2t^3+3t^2$ とすると

$g'(t)=-6t^2+6t$ | $g'(t)=0$ で $t=0, 1$

$=-6t(t-1)$

| $t$ | | 0 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | − | 0 | + | 0 | − |
| $g(t)$ | ↘ | 0 | ↗ | 1 | ↘ |

$g(0)=0$，$g(1)=1$




$y=g(t)$ と $y=a$ のグラフの交点の座標が実数 $t$ の個数であり，引ける接線の本数である。