

1 次の等式を証明せよ。

[各10点×2]

(1) $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$

(2) $(a^2 - b^2)(x^2 - y^2) = (ax - by)^2 - (ay - bx)^2$

2 $a+b+c=0$ のとき、次の等式を証明せよ。

[10点]

$a^2 - 2bc = b^2 + c^2$

3 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ のとき、次の等式を証明せよ。

[10点]

$(a+b)(c-d) = (a-b)(c+d)$

4 a, b, c が $a:b:c=2:3:4$, $a+b+c=18$ をみたすとき、 $a^2+b^2+c^2$ の値を求めよ。

[10点]

11 等式の証明

テキスト P.58 ~ 61

クラス	氏名	得点
		/50

1 次の等式を証明せよ。

[各10点×2]

(1) $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$

$$\begin{aligned} & (a+b)^2 - \{ (a-b)^2 + 4ab \} \\ &= (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2 + 4ab) \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 - 4ab \\ &= 0 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{よ} \text{て} \\ \text{よ} \text{て} \end{array} \right. \quad (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$$

(2) $(a^2 - b^2)(x^2 - y^2) = (ax - by)^2 - (ay - bx)^2$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (a+b)(a-b)(x+y)(x-y) \dots ① \\ \text{右辺} &= \{ (ax-by) + (ay-bx) \} \{ (ax-by) - (ay-bx) \} \\ &= (ax+ay-bx-bx)(ax-by+bx-by) \\ &= \{ a(x+y) - b(x+y) \} \{ a(x-y) + b(x-y) \} \\ &= (x+y)(a-b)(x-y)(a+b) \dots ② \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{①②より} \\ \text{題意は示された。} \end{array} \right.$$

2 $a+b+c=0$ のとき、次の等式を証明せよ。

[10点]

$$\begin{aligned} a^2 - 2bc = b^2 + c^2 & \quad \left(\begin{array}{l} a^2 - 2bc - (b^2 + c^2) \\ = a^2 - 2bc - b^2 - c^2 \\ = a^2 - (b^2 + 2bc + c^2) \\ = a^2 - (b+c)^2 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{l} \because a+b+c=0 \text{より} \\ b+c=-a \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{l} \text{よ} \text{て} \\ \text{よ} \text{て} \end{array} \right. \quad a^2 - 2bc = b^2 + c^2 \\ &= a^2 - (-a)^2 \\ &= a^2 - a^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

3 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ のとき、次の等式を証明せよ。

[10点]

$(a+b)(c-d) = (a-b)(c+d)$

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \text{ と可} & \quad \left(\begin{array}{l} a = bk \\ c = dk \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{l} \text{左辺} \\ = (b+k)(d-k) \\ = b(d-k) + d(k-d) \\ = bd - bk + dk - d^2 \\ = bd - b(k-1) + d(k-1) \\ = (b+d)(k-1) \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \text{右辺} \\ = (b-k)(d+k) \\ = b(d+k) - d(k+d) \\ = bd + bk - dk - d^2 \\ = bd - b(k-1) + d(k-1) \\ = (b+d)(k-1) \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \text{①②より} \\ \text{左辺} = \text{右辺} \text{より} \\ \text{題意は示された。} \end{array} \right.$$

4 a, b, c が $a:b:c=2:3:4$ 、 $a+b+c=18$ をみたすとき、 $a^2+b^2+c^2$ の値を求めよ。

[10点]

$$\begin{aligned} a=2k, b=3k, c=4k \text{ と表} & \quad \left(\begin{array}{l} a+b+c=18 \text{より} \\ 2k+3k+4k=18 \\ 9k=18 \\ k=2 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{l} \text{よ} \text{て} \\ a=4 \\ b=6 \\ c=8 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} a^2+b^2+c^2 \\ = 16+36+64=116 \end{array} \right. \end{aligned}$$

1) 別解例

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= a^2 + 2ab + b^2 \dots ① \\ \text{右辺} &= a^2 - 2ab + b^2 + 4ab \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \dots ② \\ \text{①②より 左辺} &= \text{右辺} \\ \text{よ} \text{て 題意は示された。} & \end{aligned}$$

2) 別解例

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (ax)^2 - (ay)^2 - (bx)^2 + (by)^2 \dots ① \\ \text{右辺} &= (ax)^2 - 2ax \cdot by + (by)^2 - (ay)^2 + 2ay \cdot bx - (bx)^2 \\ &= (ax)^2 - (ay)^2 + (by)^2 - (bx)^2 \dots ② \\ \text{①②より 左辺} &= \text{右辺} \\ \text{よ} \text{て 題意は示された。} & \end{aligned}$$

⑤ 等式の証明の最重要注意事項は「等式の手で全体を示すこと」です。それをやれば13か14かです。

不可行例

$$\begin{aligned} \text{① ①} & \quad (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab \\ & \quad a^2 + 2ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 4ab \\ & \quad a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ & \quad \text{よ} \text{て示された} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{「真である」と証明するのは} \\ \text{存外で、それが成り立つ} \\ \text{前提に見える証明を} \\ \text{書いてはいけない。} \end{array} \right.$$

⑥ 「 $A=B$ 」を証明する一般的な解法は2つと5つが案にかけられる方も選ぶこと。(基本、どいふでも書けます)

(その1) 左辺と右辺を別々に変形して、同じ式になることを示す。

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \dots \\ &= \dots \\ &= \dots \\ \text{右辺} &= \dots \\ &= \dots \\ &= \dots \end{aligned}$$

よて 左辺 = 右辺

(その2) 左辺 - 右辺 = 0 になることを示す。

$$\begin{aligned} \text{左辺} - \text{右辺} &= (\dots) - (\dots) \\ &= \dots \\ &= 0 \end{aligned}$$

よて 左辺 = 右辺が示された。