実施日▶　月　日

11 等式の証明

テキスト P.58 ~ 61

クラス	氏名	得点
		/50

1 次の等式を証明せよ。 ［各10点×2］

(1) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

(2) $(a^2-b^2)(x^2-y^2)=(ax-by)^2-(ay-bx)^2$

2 $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ。 ［10点］

$a^2-2bc=b^2+c^2$

3 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ。 ［10点］

$(a+b)(c-d)=(a-b)(c+d)$

4 a, b, c が $a:b:c=2:3:4$, $a+b+c=18$ をみたすとき，$a^2+b^2+c^2$ の値を求めよ。 ［10点］

実施日▶　　月　　日

11 等式の証明

テキストP.58～61

クラス	氏名	得点
		/50

[1] 次の等式を証明せよ。　[各10点×2]

(1) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

$(a+b)^2-\{(a-b)^2+4ab\}$
$=(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2+4ab)$
$=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2-4ab$
$=0$
よって $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

(2) $(a^2-b^2)(x^2-y^2)=(ax-by)^2-(ay-bx)^2$

左辺
$=(a+b)(a-b)(x+y)(x-y)$ …①
右辺
$=\{(ax-by)+(ay-bx)\}\{(ax-by)-(ay-bx)\}$
$=(ax+ay-bx-by)(ax-ay+bx-by)$
$=\{a(x+y)-b(x+y)\}\{a(x-y)+b(x-y)\}$
$=(x+y)(a-b)\cdot(x-y)(a+b)$
$=(a+b)(a-b)(x+y)(x-y)$ …②
①②より題意は示された。

[2] $a+b+c=0$ のとき、次の等式を証明せよ。　[10点]

$a^2-2bc=b^2+c^2$

$(a^2-2bc)-(b^2+c^2)$
$=a^2-2bc-c^2-b^2$
$=a^2-(b^2+2bc+c^2)$
$=a^2-(b+c)^2$
($\because a+b+c=0$ より $b+c=-a$)
$=a^2-(-a)^2$
$=a^2-a^2$
$=0$
よって $a^2-2bc=b^2+c^2$

[3] $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき、次の等式を証明せよ。　[10点]

$(a+b)(c-d)=(a-b)(c+d)$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ とすると
$a=bk$
$c=dk$ と表せる。

左辺
$=(bk+b)(dk-d)$
$=b(k+1)\cdot d(k-1)$
$=bd(k+1)(k-1)$ …①

右辺
$=(bk-b)(dk+d)$
$=b(k-1)\cdot d(k+1)$
$=bd(k+1)(k-1)$ …②

①、②より
左辺=右辺 で
題意は示された。

[4] a, b, c が $a:b:c=2:3:4$, $a+b+c=18$ をみたすとき、$a^2+b^2+c^2$ の値を求めよ。　[10点]

$a=2k$
$b=3k$
$c=4k$ と表せる。($k\neq0$)

$a+b+c=18$ より
$2k+3k+4k=18$
$9k=18$
$k=2$

よって
$a=4$
$b=6$
$c=8$ より
$a^2+b^2+c^2$ で
$=16+36+64=116$

116

[1] (1) 別解例

左辺
$=a^2+2ab+b^2$ …①
右辺
$=a^2-2ab+b^2+4ab$
$=a^2+2ab+b^2$ …②
①、②より 左辺=右辺
よって題意は示された。

(2) 別解例

左辺
$=(ax)^2-(ay)^2-(bx)^2+(by)^2$ …①
右辺
$=(ax)^2-2ax\cdot by+(by)^2-(ay)^2+2ay\cdot bx-(bx)^2$
$=(ax)^2-(ay)^2-(bx)^2+(by)^2$ …②
①、②より 左辺=右辺
よって題意は示された。

◎ 等式の証明の最重要注意事項は「等式のままで全体を示していかない」ことです。それを守れているか がカギです。

不可な例

[1] (1)
$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$
$a^2+2ab+b^2=a^2-2ab+b^2+4ab$
$a^2+2ab+b^2=a^2+2ab+b^2$
よって示された

← 「真である」と証明すべき式なので、それが成り立つ前提に見える証明を書いてはいけません。

◎ 「A=B」を証明すべき一般的な解法は2つ どちらか楽にかけそうな方を選ぶこと。(基本、どちらでも書けます。)

(その1) 左辺と右辺を別々に変形して、同じ式になることを示す。

左辺　右辺
=…　=…
=…　=…
=○　=○
(同じ式)
よって 左辺=右辺

(その2) 「左辺−右辺=0」になることを示す

左辺−右辺
=(…)−(…)
=……
=0
よって 左辺=右辺が示された。