場合の数

確認問題

1

P.1

積の法則…ことがらAの起こり方がa通りあり，それぞれの場合に対して，ことがらBの起こり方がb通りあるとき，A，Bがともに起こる場合の数は，

ab通り

順列…いくつかのものに順序をつけて並べたものを順列という。

n個の異なるものからr個の異なるものを取り出してつくった順列の総数は，

${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$

(1)　4けたの整数は，5個の数字から4個取ってつくった順列の数だけあるから，

$${}_5P_4 = 5\times4\times3\times2$$
$$= \mathbf{120}(\text{個})$$ …答

(2)①　十の位に入る数の選び方は，0をのぞく4通り。

このそれぞれについて，一の位に入る数の選び方は4通り。

よって，2けたの整数は，

$4\times4=\mathbf{16}$(個)　…答

②　百の位に入る数の選び方は，0をのぞく4通り。

このそれぞれについて，十の位，一の位に入る数の選び方は，4個の数字から2個取ってつくった順列の数だけあるから，${}_4P_2$通り。

よって，3けたの整数は，

$$4\times{}_4P_2 = 4\times4\times3$$
$$= \mathbf{48}(\text{個})$$ …答

(3)　・Aが左端，Bが右端となる並べ方

A，Bの位置の決め方は1通り。

C，D，E，Fの位置の決め方は，4個のものから4個取ってつくった順列の数だけあるから，${}_4P_4$通り。

よって，並べ方の総数は，

$${}_4P_4 = 4\times3\times2\times1$$
$$= \mathbf{24}(\text{通り})$$ …答

・AとBがとなり合う並べ方

AとBを1人とみなすと，5人の並び方の数は，5個のものから5個取ってつくった順列の数だけあるから，${}_5P_5$通り。

このそれぞれについて，AとBの並べ方が2通りあるから，

$${}_5P_5\times2 = 5\times4\times3\times2\times1\times2$$
$$= \mathbf{240}(\text{通り})$$ …答

2

P.2

重複順列…同じものを繰り返し用いてもよい場合の順列を重複順列という。

n個のものから，同じものを何度使ってもよいとして，r個を取り出して一列に並べた重複順列の総数は，

n^r

円順列…n個の異なるものを円形に並べたものを，n個のものの円順列という。

異なるn個のものの円順列の総数は，

$\dfrac{{}_nP_n}{n}$

(1)　3けたの整数は，5個のものから3個取って並べた重複順列の数だけあるから，

$5^3=\mathbf{125}$(通り)　…答

(2)①　百の位に入る数の選び方は，0をのぞく3通り。

このそれぞれについて，十の位，一の位に入る数の選び方は，4個の数字から2個取って並べた重複順列の数だけあるから，4^2通り。

よって，3けたの整数は，

$3\times4^2=\mathbf{48}$(個)　…答

②　千の位に入る数の選び方は，0をのぞく3通り。

このそれぞれについて，百，十，一の位に入る数の選び方は，4個の数字から3個取って並べた重複順列の数だけあるから，4^3通り。

よって，4けたの整数は，

$3\times4^3=\mathbf{192}$(個)　…答

(3)　5個のものの円順列の数だけあるから，

$$\frac{{}_5P_5}{5}=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{5}$$

$=24$(通り)　…答

(4)①　6個のものの円順列の数だけあるから，

$$\frac{{}_6P_6}{6}=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{6}$$

$=120$(通り)　…答

②　男子2人を1人とみなすと，5人のすわり方は，

$\frac{{}_5P_5}{5}$通り。

このそれぞれについて，男子2人のすわり方が2通りあるから，

$$\frac{{}_5P_5}{5}\times2=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{5}\times2$$

$=48$(通り)　…答

3

P.3

組合せ…いくつかのものから，並べる順序は問題にしないで，その一部を取り出す取り出し方を組合せという。

n個の異なるものからr個の異なるものを取り出してつくった組合せの総数は，

$$ {}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{{}_rP_r}$$

(1)　特定の1人をふくむ4人を選ぶ場合の数は，特定の1人以外の19人から3人を選ぶ組合せの数だけあるから，

$$ {}_{19}C_3=\frac{19\times18\times17}{3\times2\times1}$$

$=969$(通り)　…答

(2)①　8個の点から2個の点を選ぶ組合せの数だけあるから，

$$ {}_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}$$

$=28$(本)　…答

②　8個の点から3個の点を選ぶ組合せの数だけあるから，

$$ {}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}$$

$=56$(個)　…答

(3)①　4個の点から2個の点を選ぶ組合せの数だけあるから，

$$ {}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}$$

$=6$(通り)　…答

②　5個の点から2個の点を選ぶ組合せの数だけあるから，

$$ {}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}$$

$=10$(通り)　…答

③　直線ℓ上の点から2個，直線m上の点から2個選ぶ場合の数だから，(1)，(2)より，

$6\times10=60$(個)　…答

(4)　男子8人から2人を選ぶ組合せの数は，

${}_8C_2$通り

女子10人から3人を選ぶ組合せの数は，

${}_{10}C_3$通り

よって，5人の代表を選ぶ方法は，

$$ {}_8C_2\times{}_{10}C_3=\frac{8\times7}{2\times1}\times\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}$$

$=3360$(通り)　…答

(5)　縦の辺から2本を選び，横の辺から2本を選ぶと，その4本で1つの長方形ができる。

縦の辺5本から2本を選ぶ組合せの数は，

${}_5C_2$通り

横の辺4本から2本を選ぶ組合せの数は，

${}_4C_2$通り

よって，長方形の総数は，

$$ {}_5C_2\times{}_4C_2=\frac{5\times4}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}$$

$=60$(個)　…答

(6)　8人から4人を選び，この4人をAに入れれば，Bは残りの4人が入ることになる。

よって，AとBの部屋の分け方は，8人から4人を選ぶ組合せの数だけあるから，

$$ {}_8C_4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}$$

$=70$(通り)　…答

(7)　4人ずつ2つの組に分けることは，(6)でA，Bの区別がない場合である。

$70\div2=35$(通り)　…答

(8)　まず6人を2人ずつ3つの組A，B，Cに分ける方法を考える。

6人からAに入る2人を選ぶ方法は，${}_6C_2$通り。

残りの4人からBに入る2人を選ぶ方法は，${}_4C_2$通り。

残りの2人はCに入るから，分け方の総数は，

${}_6C_2 \times {}_4C_2$ 通り

ここでA，B，Cの区別をなくすと，A，B，Cの順列の数${}_3P_3$通りずつ同じ分け方が出てくる。

よって，2人ずつ3組に分ける方法は，

$$\frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2}{{}_3P_3} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{1}{3 \times 2 \times 1}$$

$= 15$(通り)　…答

4

P.4

(1)　5個の場所のうち1が入る2個の場所を選べば，1つの整数が決まる。

(2)①　東へ1区画進むことをe，北へ1区画進むことをnと表すと，1つの道順はeを5個，nを4個用いた順列で表すことができる。

②　AからCへ行く道順の数，CからBへ行く道順の数を求め，かけ合わせる。

③　全体の数からC地点を通る道順の数をひく。

(3)　7回のうち表が出る3回を選べばよい。

(4)　10個の○に2個の区切り線を入れる。

○○|○○○○○|○○○

これは，左から長男に2個，次男に5個，三男に3個分けることを示す。

(5)　(4)と同様に，8個のものを3つに分割し，それぞれa，b，cに分けると考える。

(1)　5個の場所のうち1が入る2個の場所を選べば，1つの整数が決まる。

よって，5けたの整数は，5個から2個とった組合せの数だけあるから，

$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1}$$

$= 10$(通り)　…答

(2)①　東へ1区画進むことをe，北へ1区画進むことをnと表すと，1つの道順はeを5個，nを4個用いた順列で表すことができる。

この順列の総数は，9か所からnが入る4か所を選ぶ組合せの数だけあるから，

$${}_9C_4 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$= 126$(通り)　…答

②　AからCへ行く道順の数は，${}_5C_2$通り。

CからBへ行く道順の数は，${}_4C_2$通り。

よって，AからCを経てBへ行く道順の数は，

$${}_5C_2 \times {}_4C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1}$$

$= 60$(通り)　…答

③　①，②より，

$126 - 60 = 66$(通り)　…答

(3)　7回のうち表が出る3回を選べば，1つの場合が決まる。

よって，表が3回出る場合は，7回から表が出る3回を選ぶ組合せの数だけあるから，

$${}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1}$$

$= 35$(通り)　…答

(4)　10個の○に2個の区切り線を入れる。

例えば，○○|○○○○○|○○○

は，左から長男に2個，次男に5個，三男に3個分けることを示す。

この区切りが入れられる箇所は9箇所あるから，3人に分ける方法は，9個から2個とった組合せの数だけある。

$${}_9C_2 = \frac{9 \times 8}{2 \times 1}$$

$= 36$(通り)　…答

(5)　8個の○に2個の区切り線を入れる。

例えば，○○○|○○○○|○

は，左から$a = 3$，$b = 4$，$c = 1$を示す。

この区切りが入れられる箇所は7箇所あるから，8個を3つに分ける方法は，7個から2個とった組合せの数だけある。

$${}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1}$$

$= 21$(組)　…答

発展問題

1

P.5

(1)③　目の和が偶数になるのは，どちらも偶数かどちらも奇数の場合である。
④　目の積が偶数になるのは，少なくとも一方が偶数になるときである。
(2)①　積の法則を利用する。
②　①に，A町からC町を経てD町に行く道順の数を加える。
(3)①　13枚のスペードのカードから3枚を取って並べた順列の数を求める。
②　12枚の絵札のカードから3枚を取って並べた順列の数を求める。

(1)①　大小それぞれ3通りの目の出方があるので，

$3\times3=\mathbf{9}$(通り)　…答

②　大小それぞれ3通りの目の出方があるので，

$3\times3=\mathbf{9}$(通り)　…答

③　目の和が偶数になるのは，どちらも偶数かどちらも奇数の場合だから，①，②より，

$9+9=\mathbf{18}$(通り)　…答

④　目の積が偶数になるのは，少なくとも一方が偶数になるときである。
起こりうるすべての場合は，36通り。
どちらも奇数の目が出るのは9通りだから，

$36-9=\mathbf{27}$(通り)　…答

(2)①　A町からB町まで3通り，B町からD町まで2通りの道があるので，

$3\times2=\mathbf{6}$(通り)　…答

②　A町からC町を経てD町に行く方法は，

$2\times2=4$(通り)

よって，A町からD町に行く方法は，

$6+4=\mathbf{10}$(通り)　…答

(3)①　13枚のスペードのカードから3枚を取って並べた順列の数だけあるから，

$${}_{13}P_3=13\times12\times11$$
$$=\mathbf{1716}\text{(通り)}$$　…答

②　12枚の絵札のカードから3枚を取って並べた順列の数だけあるから，

$${}_{12}P_3=12\times11\times10$$
$$=\mathbf{1320}\text{(通り)}$$　…答

2

(1)①　百の位には0以外の数が入る。
十の位，一の位に入る数は重複順列になる。
②　十の位，一の位に入る数は順列になる。
(2)①　部長と副部長を選ぶので，順列を考える。
②　男子が部長のときと女子が部長のときがある。
(3)①　8個のものの円順列となる。
②　まず男子4人を並べ，その間に女子4人を入れていく。このとき，男子4人の並び方は円順列，女子4人の並び方は順列となる。

(1)①　百の位に入る数の選び方は，0をのぞく5通り。
このそれぞれについて，十の位，一の位に入る数の選び方は，6個の数字から2個取って並べた重複順列の数だけあるから，6^2通り。
よって，3けたの整数は，

$5\times6^2=\mathbf{180}$(個)　…答

②　百の位に入る数の選び方は，0をのぞく5通り。
このそれぞれについて，十の位，一の位に入る数の選び方は，5個の数字から2個取って並べた順列の数だけあるから，${}_5P_2$通り。
よって，3けたの整数は，

$$5\times{}_5P_2=5\times5\times4$$
$$=\mathbf{100}\text{(個)}$$　…答

(2)①　18人の中から2人を選んで並べ，その順に部長，副部長とすればよい。
この選び方は，18人の中から2人取って並べた順列の数だけあるから，

$${}_{18}P_2=18\times17$$
$$=\mathbf{306}\text{(通り)}$$　…答

②　男子10人から1人，女子8人から1人選び，部長と副部長を決めるから，その方法は，

$10\times8\times2=\mathbf{160}$(通り)　…答

(3)①　8個のものの円順列の数だけあるから，

$$\frac{{}_8P_8}{8}=\frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{8}$$
$$=\mathbf{5040}\text{(通り)}$$　…答

② まず男子4人の並び方は，4個のものの円順列の数だけあるから，$\frac{{}_4P_4}{4}$通り。

このそれぞれについて女子4人の並び方は，4個のものの順列の数だけあるから，${}_4P_4$通り。

よって，男女が交互に並ぶすわり方は，

$$\frac{{}_4P_4}{4}\times{}_4P_4=\frac{4\times3\times2\times1}{4}\times4\times3\times2\times1$$

$$=\mathbf{144}(\textbf{通り})\quad\cdots\boxed{答}$$

3

P.6

(1)①② 組合せの数${}_nC_r$を使って求める。

③ 少なくとも1人は男子が選ばれるのは，3人とも女子が選ばれる場合以外である。

(2) ハンバーガー，飲み物それぞれの選び方の数を求め，かけ合わせる。

(3)① ℓ，m，nから2本，p，q，r，sから1本選べば，三角形が1つできる。

② ℓ，m，nから2本，p，q，r，sから2本選べば，四角形が1つできる。

(4)① 偶数の中から3個選ぶ組合せの数を求める。

② 3つの数の積が奇数になるのは，3つとも奇数のときである。

③ 偶数から2個，奇数から1個選ぶ場合の数を求める。

(1)① 女子14人から3人を選ぶ組合せの数は，

$${}_{14}C_3=\frac{14\times13\times12}{3\times2\times1}$$

$$=\mathbf{364}(\textbf{通り})\quad\cdots\boxed{答}$$

② 26人から3人を選ぶ組合せの数は，

$${}_{26}C_3=\frac{26\times25\times24}{3\times2\times1}$$

$$=\mathbf{2600}(\textbf{通り})\quad\cdots\boxed{答}$$

③ 少なくとも1人は男子が選ばれるのは，3人とも女子が選ばれる場合以外だから，①，②より，

$$2600-364=\mathbf{2236}(\textbf{通り})\quad\cdots\boxed{答}$$

(2) ハンバーガーを3種類選ぶ方法は，${}_8C_3$通り。

飲み物を2種類選ぶ方法は，${}_{10}C_2$通り。

だから，求める場合の数は，

$${}_8C_3\times{}_{10}C_2=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}\times\frac{10\times9}{2\times1}$$

$$=\mathbf{2520}(\textbf{通り})\quad\cdots\boxed{答}$$

(3)① ℓ，m，nから2本，p，q，r，sから1本選べば，三角形が1つできる。

よって，三角形の個数は，

$${}_3C_2\times{}_4C_1=3\times4$$

$$=\mathbf{12}(\textbf{個})\quad\cdots\boxed{答}$$

② ℓ，m，nから2本，p，q，r，sから2本選べば，四角形が1つできる。

よって，四角形の個数は，

$${}_3C_2\times{}_4C_2=3\times\frac{4\times3}{2}$$

$$=\mathbf{18}(\textbf{個})\quad\cdots\boxed{答}$$

(4)① 偶数2，4，6，8，10から3個選ぶ組合せの数は，

$${}_5C_3=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}$$

$$=\mathbf{10}(\textbf{通り})\quad\cdots\boxed{答}$$

② 3つの数の積が奇数になるのは，3つとも奇数のときである。

奇数1，3，5，7，9から3個選ぶ組合せの数は，

$${}_5C_3=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}$$

$$=\mathbf{10}(\textbf{通り})\quad\cdots\boxed{答}$$

③ 偶数2，4，6，8，10から2個，奇数1，3，5，7，9から1個選ぶ場合の数は，

$${}_5C_2\times{}_5C_1=\frac{5\times4}{2\times1}\times5$$

$$=\mathbf{50}(\textbf{通り})\quad\cdots\boxed{答}$$

4

(1)　7個の場所のうちaが入る3個の場所を選ぶ組合せの数を求める。
(2)②　12人から5人を選び，残りの7人から4人を選ぶ場合の数を求める。
　③　特定の2人がどの車に乗るかで場合に分けて調べる。
(3)①　横に並んだ20個のものを1つの仕切りで分けることを考える。
　②　横に並んだ20個のものを2つまたは3つの仕切りで分けることを考える。
　　分かれたそれぞれの個数が，和が20となる自然数の組となる。

(1)　7個の場所のうちaが入る3個の場所を選べば，1つの文字列が決まる。
よって，文字列の総数は，7個から3個とった組合せの数だけあるから，

$${}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}$$
$$=35(\text{通り})$$ …**答**

(2)①　12人から5人を選ぶ場合の数は，

$${}_{12}C_5=\frac{12\times11\times10\times9\times8}{5\times4\times3\times2\times1}$$
$$=792(\text{通り})$$ …**答**

②　5人乗りに乗る人を選んだ後に，4人乗りに乗る人を選べばよい。7人から4人を選ぶ場合の数は，${}_7C_4$通りだから，12人が分乗する方法は，

$${}_{12}C_5\times{}_7C_4=792\times\frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}$$
$$=27720(\text{通り})$$ …**答**

③　5人乗りの車をA，4人乗りの車をB，3人乗りの車をCとする。
・特定の2人がAに乗るとき，
残りの10人から，Aに乗る3人とCに乗る3人を選べばよい。その方法は，

$${}_{10}C_3\times{}_7C_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}\times\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}$$
$$=4200(\text{通り})$$

・特定の2人がBに乗るとき，
残りの10人から，Bに乗る2人とCに乗る3人を選べばよい。その方法は，

$${}_{10}C_2\times{}_8C_3=\frac{10\times9}{2\times1}\times\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}$$
$$=2520(\text{通り})$$

・特定の2人がCに乗るとき，
残りの10人から，Cに乗る1人とBに乗る4人を選べばよい。その方法は，

$${}_{10}C_1\times{}_9C_4=10\times\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}$$
$$=1260(\text{通り})$$

よって，求める場合の数は，

$$4200+2520+1260=7980(\text{通り})$$ …**答**

(3)①　横に並んだ20個のものを1つの仕切りで分け，分けたそれぞれの個数を2つの自然数とすればよい。
この分け方の数は，**19通り**　…**答**

②　3つの自然数の和で表す方法は，横に並んだ20個のものを2つの仕切りで分け，分けた3箇所の個数を3つの自然数とすればよい。
この分け方の数は，

$${}_{19}C_2=\frac{19\times18}{2\times1}$$
$$=171(\text{通り})$$

4つの自然数の和で表す方法は，同様に，横に並んだ20個のものを3つの仕切りで分け，分けた4箇所の個数を4つの自然数とすればよい。
この分け方の数は，

$${}_{19}C_3=\frac{19\times18\times17}{3\times2\times1}$$
$$=969(\text{通り})$$

よって，求める場合の数は，

$$19+171+969=1159(\text{通り})$$ …**答**