2020 年度

数　　学

（問　題）

〈R02140018〉

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで，問題冊子および解答用紙には手を触れないこと。
2. 問題は 4〜5 ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚損等に気付いた場合は，手を挙げて監督員に知らせること。
3. 解答はすべて，ＨＢの黒鉛筆またはＨＢのシャープペンシルで記入すること。
4. 記述解答用紙記入上の注意
   (1) 記述解答用紙の所定欄（2 カ所）に，氏名および受験番号を正確に丁寧に記入すること。
   (2) 所定欄以外に受験番号・氏名を記入した解答用紙は採点の対象外となる場合がある。
   (3) 受験番号の記入にあたっては，次の数字見本にしたがい，読みやすいように，正確に丁寧に記入すること。

数字見本	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

   (4) 受験番号は右詰めで記入し，余白が生じる場合でも受験番号の前に「0」を記入しないこと。

	万	千	百	十	一
（例）3825 番⇒		3	8	2	5

   (5) 計算の途中経過を記述すること。記述されていない解答は採点の対象外となる場合がある。
   (6) 定規，コンパスを使用してもよい。
5. 解答はすべて所定の解答欄に記入すること。所定欄以外に何かを記入した解答用紙は採点の対象外となる場合がある。なお，所定の解答欄は記述解答用紙に指示されている部分とする。
6. 試験終了の指示が出たら，すぐに解答をやめ，筆記用具を置き解答用紙を裏返しにすること。
7. いかなる場合でも，解答用紙は必ず提出すること。
8. 試験終了後，問題用紙は持ち帰ること。

この頁は下書きに使用してよい

この頁は下書きに使用してよい

1

a,bを定数とする。関数$f(x)=x^3-3ax^2+12x+b$は$x=\alpha$で極大値をとり，$x=\beta$で極小値をとる。次の問に答えよ。

（1） $f(x)$が極大値および極小値をとるために，定数a,bが満たすべき条件を求めよ。

（2） $f(x)$の導関数を$f'(x)$とする。xの整式 $f(x)$ を整式 $f'(x)$ で割ったときの余りを求めよ。

（3） $f(\alpha)+f(\beta)$をa,bを用いて表せ。

（4） $f(\alpha)+f(\beta)=0$となる実数の組(a,b)の集合をab平面上に図示せよ。

2

m,nを自然数とする。次の問に答えよ。

（1） 関数$f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x-k)^2$の最小値と、そのときの$x$の値を$n$を用いて表せ。

（2） 定数a_1,a_2,a_3は$a_1<a_2<a_3$を満たす。関数$g(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|$の最小値と, そのときの$x$の値を$a_1,a_2,a_3$を用いて表せ。

（3） 関数 $h(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{2m+1}|x-2^k|$の最小値と、そのときの$x$の値を$m$を用いて表せ。

3

座標平面上の 5 つの点 $\mathrm{P}_1\left(-\sqrt{5}, 0\right)$，$\mathrm{P}_2\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\mathrm{P}_3\left(0, 0\right)$，$\mathrm{P}_4\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\mathrm{P}_5\left(\sqrt{5}, 0\right)$ をそれぞれ中心とする半径 1 の円を C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 とする。次の問に答えよ。

（1） 1 つ以上の円に囲まれる領域の面積を求めよ。

（2） 2 つ以上の円と接する直線の本数を求めよ。

（3） 3 つ以上の円と外接する円の半径をすべて求めよ。

［以　下　余　白］

この頁は下書きに使用してよい

この頁は下書きに使用してよい

$\boxed{1}$

(1)　関数 $f(x)=x^3-3ax^2+12x+b$ が極大値および極小値をもつとき，

$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ．

$$f'(x)=3x^2-6ax+12=0$$

より，判別式をとると，

$$\frac{D}{4}=9a^2-36>0$$

$\boxed{a<-2,\ 2<a,\ b\text{ は任意の実数}}$ ……(答)

(2)　割り算を実行すると，

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{3}x-\frac{a}{3} \\ \hline 3x^2-6ax+12 & x^3-3ax^2+12x+b \\ & x^3-2ax^2+4x \\ \hline & -ax^2+8x+b \\ & -ax^2+2a^2x-4a \\ \hline & (8-2a^2)x+(4a+b) \end{array}$$

$f(x)$ を $f'(x)$ で割ったときの余りは，

$\boxed{(8-2a^2)x+4a+b}$ ……(答)

(3)　α, β は $f'(x)=0$ の解より，解と係数の関係から

$$\begin{cases}\alpha+\beta=2a \\ \alpha\beta=4\end{cases}$$

(2)より，

$$f(x)=f'(x)\left(\frac{1}{3}x-\frac{a}{3}\right)+(8-2a^2)x+4a+b$$

いま $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ であるから，

$$\begin{aligned} f(\alpha)+f(\beta)&=(8-2a^2)(\alpha+\beta)+8a+2b \\ &=\boxed{-4a^3+24a+2b} \end{aligned}$$ ……(答)

(4)　(3)より，

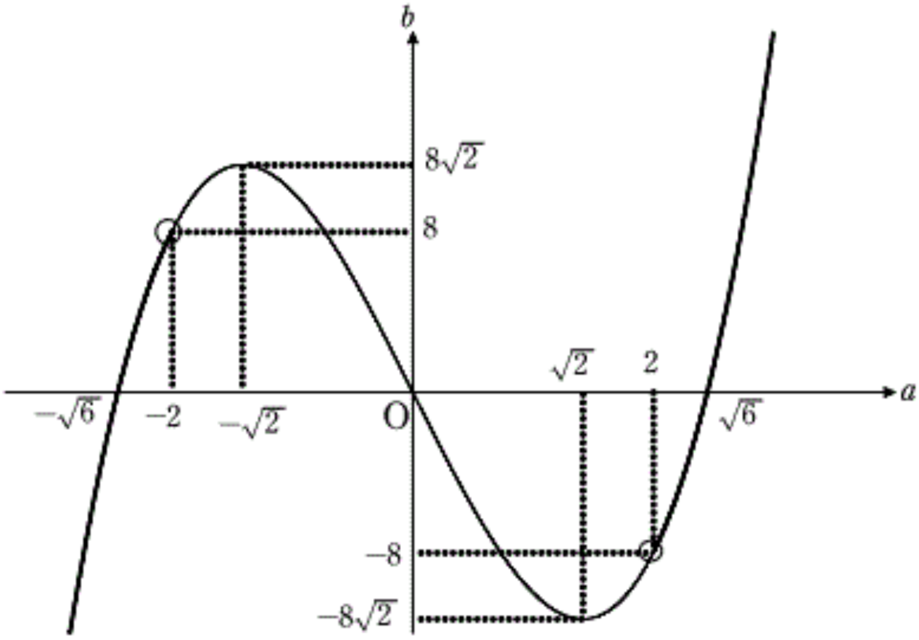
$$-4a^3+24a+2b=0$$
$$\iff b=2a^3-12a$$

したがって，

$b=2a^3-12a=0$ のとき，　$a=\pm\sqrt{6},\ 0$

$b'=6a^2-12=0$ のとき，　$a=\pm\sqrt{2}$

(1)で求めた $a<-2,\ 2<a$ に注意し図形を描くと，下の図の太線部.



$\boxed{2}$

(1)　関数 $f(x)$ について，

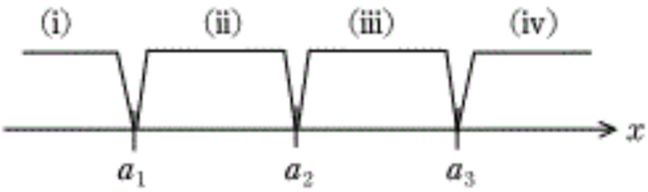
$$\begin{aligned} f(x)&=\sum_{k=1}^{n}(x-k)^2 \\ &=\sum_{k=1}^{n}\left(x^2-2kx+k^2\right) \\ &=nx^2-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)x+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &=nx^2-n(n+1)x+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &=n\left(x-\frac{n+1}{2}\right)^2-\frac{n(n+1)^2}{4}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &=n\left(x-\frac{n+1}{2}\right)^2+\frac{n(n+1)}{12}\{-3(n+1)+2(2n+1)\} \\ &=n\left(x-\frac{n+1}{2}\right)^2+\frac{n(n+1)(n-1)}{12} \end{aligned}$$

以上より，

$\boxed{x=\frac{n+1}{2}\ \text{のとき, 最小値}\ \frac{n(n+1)(n-1)}{12}}$　……(答)

(2)　定数 a_1, a_2, a_3 について，

以下のように場合分けし，関数 $g(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|$ の範囲を考える



(i) $x<a_1$ のとき

$$g(x)=-(x-a_1)-(x-a_2)-(x-a_3)$$
$$=-3x+a_1+a_2+a_3$$

(ii) $a_1 \leqq x < a_2$ のとき

$$g(x)=(x-a_1)-(x-a_2)-(x-a_3)$$
$$=-x-a_1+a_2+a_3$$

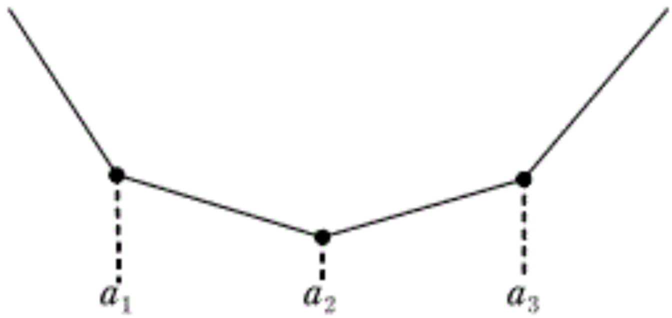
(iii) $a_2 \leqq x < a_3$ のとき

$$g(x)=(x-a_1)+(x-a_2)-(x-a_3)$$
$$=x-a_1-a_2+a_3$$

(iv) $a_3 \leqq x$ のとき

$$g(x)=(x-a_1)+(x-a_2)+(x-a_3)$$
$$=3x-a_1-a_2-a_3$$

(i)～(iv)より，図示すると次のとおり．



これより，

$\boxed{x=a_2 \text{ のとき, 最小値 } a_3-a_1}$ ……(答)

(3)　関数 $h(x)$ について，

$$h(x)=\sum_{k=1}^{2m+1}\left|x-2^k\right|$$
$$=\left|x-2\right|+\left|x-2^2\right|+\cdots\cdots+\left|x-2^{m+1}\right|+\cdots\cdots+\left|x-2^{2m+1}\right|$$

(2) の結果から，　$x=2^{m+1}$ のとき $h(x)$ は最小値をとるとわかる．

$$h(2^{m+1})=\left(\cancel{2^{m+1}}-2\right)+\left(\cancel{2^{m+1}}-2^2\right)+\cdots\cdots+\left(\cancel{2^{m+1}}-2^m\right)+0$$
$$+\left(2^{m+2}-\cancel{2^{m+1}}\right)+\left(2^{m+3}-\cancel{2^{m+1}}\right)+\cdots\cdots+\left(2^{2m+1}-\cancel{2^{m+1}}\right)$$
$$=-(2+2^2+\cdots\cdots+2^m)+(2^{m+2}+2^{m+3}+\cdots\cdots+2^{2m+1})$$
$$=-\frac{2(2^m-1)}{2-1}+\frac{2^{m+2}\cdot(2^m-1)}{2-1}$$
$$=-2^{m+1}+2+2^{2m+2}-2^{m+2}$$
$$=2^{2m+2}-3\cdot2^{m+1}+2$$

以上より，

$\boxed{x=2^{m+1}\text{ のとき, 最小値 }2^{2m+2}-3\cdot2^{m+1}+2}$　　……(答)

$\boxed{3}$

(1)　それぞれの円を図示すると，（図 1）の通り．

求める面積を S とする．

2 円の共通部分について，中心間距離は，

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$$

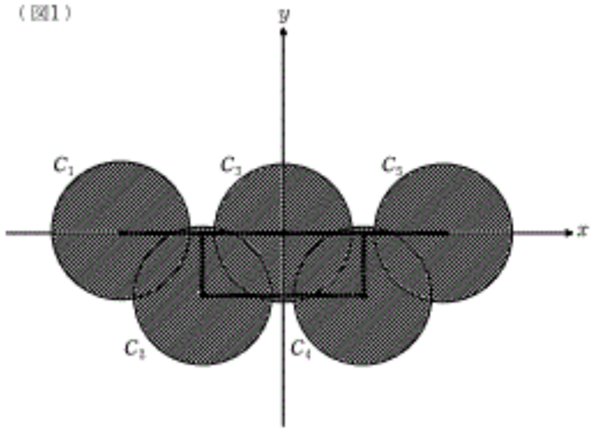
円の半径 1 より，中心角 90° の扇形を利用すればよいとわかる（図 2）．よって，2 円の共通部分は，

$$\left(\pi\cdot1^2\times\frac{1}{4}-1\times1\times\frac{1}{2}\right)\times2=\frac{\pi}{2}-1$$

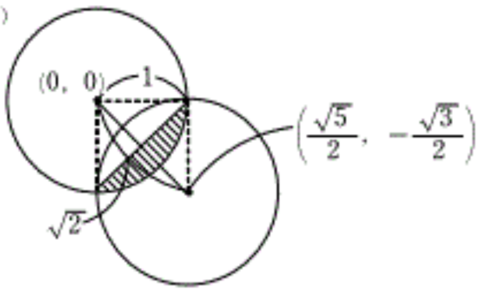
以上より，

$$S=\pi\cdot1^2\times5-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\times4$$
$$=\boxed{3\pi+4}$$
……(答)

（図1）

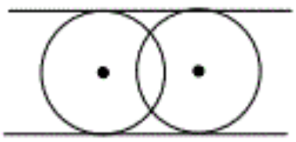


（図2）



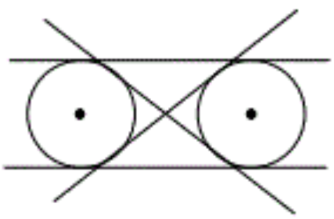
(2)　2 円の接線について，

(ⅰ) 2 円が重なる場合



接線は 2 本引くことができ，円の組み合わせ 4 通り．

(ⅱ) 2 円が重ならない場合



接線は 4 本引くことができ，円の組み合わせは，5 つの中から 2 つを選ぶ組み合わせから，2 円が重なる組み合わせを除けばよい

$${}_5C_2-4$$

よって，6 通り．

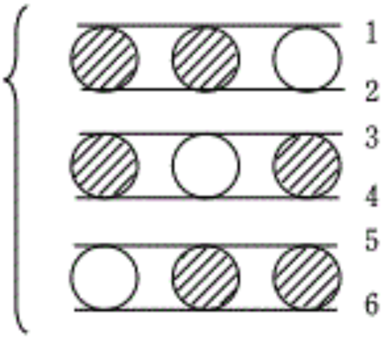
(ⅰ), (ⅱ)より,

$6\times4+4\times2=32$ 本

このうち,

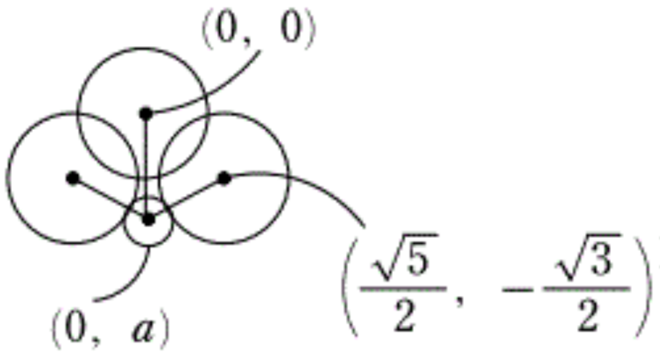
この2本の接線は, 6回数えているので,
重複して数えた分を除外すれば,

$32-4=\boxed{28\text{ 本}}$ ……(答)

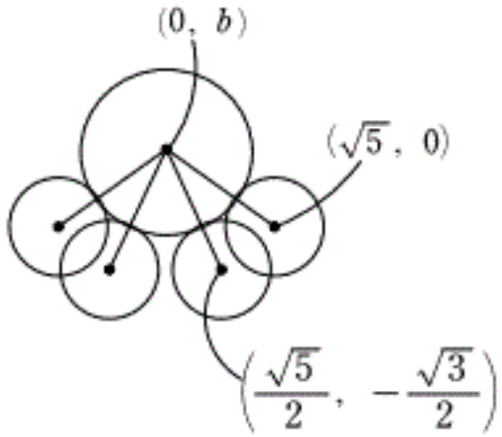


(3) 3つ以上の円に外接するのは, 次の2つの場合が考えられる.

(ⅰ)



(ⅱ)



(ⅰ) について, 円の中心を$(0, a)$ $(a<0)$とおくと, 半径について,

$$0-a=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-a\right)^2}\iff a^2=2+\sqrt{3}a+a^2$$

$$\iff a=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

よって, 外接円の半径は,

$$0-\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)-1=\frac{2\sqrt{3}}{3}-1$$

(ⅱ) について, 円の中心を$(0, b)$ $(b>0)$とおくと半径について,

$$\sqrt{5}^2+(0-b)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-b\right)^2\iff 5+b^2=2+\sqrt{3}b+b^2$$

$$\iff b=\sqrt{3}$$

よって, 外接円の半径は,

$$\sqrt{\sqrt{5}^2+\sqrt{3}^2}-1=2\sqrt{2}-1$$

以上より, $\boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1,\ 2\sqrt{2}-1}$ ……(答)