16 記数法

ポイント1 十進法と n 進法(その1)

ものの個数を数えるとき，十個集まるごとにまとめてひとつ上の位（くらい）に繰り上げる．これは**十進法**を用いていることになる．

たとえば321は $3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 1$ を短く書き表したものだということもできる．

十の代わりに，2以上の自然数 n を用いて数を書き表すこともできる．たとえば2をもとにした**2進法**では，1101で

$1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1$

という数を表すことができる．2進法では，2になると繰り上がってしまうのだから，使う数字は0と1だけである．また，たとえば7進法での321は

$3 \times 7^2 + 2 \times 7^1 + 1$

のことである．7進法では，使う数字は0，1，2，3，4，5，6だけである．

n 進法の数であることを示すために，右下に $_{(n)}$ と書く．

上の例では $1101_{(2)}$，$321_{(7)}$ となる．なお，十進法の $_{(10)}$ は普通省略する．

このように，それぞれの位（くらい）の数字を並べて数を表す方法を**位取り記数法**といい，n 進法の場合の n を**底**（てい）という．n 進法の場合，各位の数字は0から $n-1$ までの整数である．

n 進法で表された数を **n 進数**という．

例 $1101_{(2)}$ を十進法で表すと，

$1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 = 8 + 4 + 1 = 13$

$321_{(7)}$ を十進法で表すと

$3 \times 7^2 + 2 \times 7^1 + 1 = 147 + 14 + 1 = 162$

注意1 n 進法の場合，たとえば2桁目，3桁目は「じゅう」や「ひゃく」ではないから，1101は「いちいちゼロいち」，「いちいちれいいち」，321は「さんにいち」のように読む．

注意2 n 進法の $10_{(n)}$ は n に等しいから，「10進法」がもし「いちゼロ進法」だと何進法かわからないことになるので，ここでは十進法と漢字で書いた．だが実用上は「10進法」と書くことも多い．逆に「2進法」を「二進法」などと漢字で書く流儀もある．

確認問題1 次の数を十進法で表せ．

□(1) $10111_{(2)}$　　□(2) $1212_{(3)}$　　□(3) $4321_{(5)}$

ポイント2　十進法と n 進法（その2）

例題　十進数 235 を 2 進数で表せ．また 5 進数で表せ．

（解答）　235 を順次 2 で割り算していく．

$$
\begin{array}{r|l}
2 & 235 \\
2 & 117 \cdots 1 \\
2 & 58 \cdots 1 \\
2 & 29 \cdots 0 \\
2 & 14 \cdots 1 \\
2 & 7 \cdots 0 \\
2 & 3 \cdots 1 \\
 & 1 \cdots 1
\end{array}
$$

$235 = 1 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^7$

となるから，逆順に書いて，$11101011_{(2)}$

5 進法では，同様にして

$235 = 0 + 2 \times 5^1 + 4 \times 5^2 + 1 \times 5^3$

$1420_{(5)}$

$$
\begin{array}{r|l}
5 & 235 \\
5 & 47 \cdots 0 \\
5 & 9 \cdots 2 \\
 & 1 \cdots 4
\end{array}
$$

確認問題 2　次の十進数を与えられた n により n 進数で表せ．

□(1)　100，$n = 2$　　□(2)　100，$n = 7$

□(3)　416，$n = 5$　　□(4)　5312，$n = 3$

ポイント3　n 進法の小数

n 進法でも小数を考えることができる．n 進法では，小数第 1 位は $\frac{1}{n}$ の位，小数第 2 位は $\frac{1}{n^2}$ の位，… となる．

例　1)　2 進法の小数 $1011.011_{(2)}$ は，十進法では

$$1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2^2} + 1 \times \frac{1}{2^3}$$

$$= 8 + 2 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{91}{8} = 11.375$$

となる．

2)　3 進法の小数 $12.21_{(3)}$ は，十進法では

$$1 \times 3 + 2 + 2 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3^2} = 5 + \frac{7}{9}$$

となり，十進法の有限小数では表されない．

確認問題 3　次の問に答えよ．

(1)　次の n 進法の小数を十進法の小数で表せ．

□①　$111.11_{(2)}$　　□②　$43.23_{(5)}$

(2)　次の n 進法の小数を，十進法の整数と，十進法で表された 0 以上 1 未満の分数との和で表せ．

□①　$12.01_{(3)}$　　□②　$35.61_{(7)}$

ポイント4　２進法の四則計算

n 進法で表された数についても，n 進法のままで十進法と同じように筆算で計算をすることができる．ただし繰り上がり，繰り下がりが十ではなく n ごとになっていることに注意する必要がある．

2 進法は数字が 0 と 1 しかないので，ある意味簡単になる．

2 進法の加法・乗法は右の表のような計算がもとになる．

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

例　ここでは 2 進法しか使わないので，右下の $_{(2)}$ は省略する．

1)　2 進法での 10011 + 101，10011 − 101 の計算

$$\begin{array}{r} 10011 \\ +\quad 101 \\ \hline 11000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10011 \\ -\quad 101 \\ \hline 1110 \end{array}$$

2)　2 進法での 1101 × 101 の計算

$$\begin{array}{r} 1101 \\ \times\quad 101 \\ \hline 1101 \\ 1101 \\ \hline 1000001 \end{array}$$

注意　3 桁以上の数を掛けるとき，3 つ以上の数の和を求めようとすると，繰り上がりが複雑になることがある．その場合は 2 つずつ順に加えてゆけばよい．

3)　2 進法での 1111 ÷ 101 の計算

$$\begin{array}{r} 11 \\ 101\,\big)\overline{1111} \\ 101 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 0 \end{array}$$

この場合は割り切れたが，割り切れないときは十進法のときと同様に循環小数になる．

確認問題 4　次の 2 進数の四則計算を 2 進数のまま筆算で行え．

□(1)　11010 + 1001　　□(2)　11010 − 1001

□(3)　1011 × 110　　□(4)　100011 ÷ 101

ポイント5　循環小数・有限小数になる条件

数学 I で習ったように，有理数は整数・**有限小数**または**循環小数**で表される．有限小数は，分母が 10^k（k は自然数）の形の分数で表されるので，約分すれば分母は 10^k の約数である．したがって

十進法の既約分数が有限小数で表される　⟺　分母の素因数は 2 と 5 以外にない．

例　$\dfrac{14}{37}$ を循環小数で表す．

割り算を実行する．

余りに 14 が出てきた後は，前と同じ計算の繰り返しになる．

$$\frac{14}{37} = 0.378378378\cdots$$

これを $\dfrac{14}{37} = 0.\dot{3}7\dot{8}$ のように繰り返す部分の最初と最後の数字の上に点をつけて表す．また

$$\frac{5}{22} = 0.2272727\cdots = 0.2\dot{2}\dot{7},\quad \frac{1}{6} = 0.1666\cdots = 0.1\dot{6}$$

$$\begin{array}{r} 0.3783\cdots \\ 37\,\big)\overline{140} \\ 111 \\ \hline 290 \\ 259 \\ \hline 310 \\ 296 \\ \hline 140 \end{array}$$

繰り返す部分を**循環節**という．上の例ではそれぞれ 378，27，6 である．

上の割り算では，余りは 0 から 36 までの整数であるから，割り算を続けていく間に，0 にならなければ必ず前と同じ余りが出てくる．一般に，有理数を小数で表すと，もし無限小数になるならば必ず循環小数になることがわかる．

確認問題 5　次の分数を循環小数で表せ．また循環節を求めよ．

□(1)　$\dfrac{5}{9}$　　□(2)　$\dfrac{23}{54}$　　□(3)　$\dfrac{88}{91}$

ポイント6　16進法の表し方

n 進法で $n > 10$ のとき，0，1，…，9 の数字のほか，10，11，…，$n-1$ をそれぞれ表す 1 桁の “数字” が必要になる．特に 16 進法の場合，これらを順に A，B，C，D，E，F のアルファベット大文字で表すことが多い．

例 1

16 進数 $13_{(16)}$，$A7_{(16)}$ はそれぞれ十進数では

$1 \times 16 + 3 = 19$,　　$10 \times 16 + 7 = 167$

となる．

十進数 100，5277 をそれぞれ 16 進数で表すと

$100 = 6 \times 16 + 4$

$64_{(16)}$

$5277 = 1 \times 16^3 + 4 \times 16^2 + 9 \times 16 + 13$

$149D_{(16)}$

となる．

$$\begin{array}{r} 6 \\ 16\,\big)\overline{100} \\ \underline{96} \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 329 \\ 16\,\big)\overline{5277} \\ \underline{48} \\ 47 \\ \underline{32} \\ 157 \\ \underline{144} \\ 13 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 20 \\ 16\,\big)\overline{329} \\ \underline{32} \\ 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 16\,\big)\overline{20} \\ \underline{16} \\ 4 \end{array}$$

例 2

8 桁の 2 進数 $11011010_{(2)}$ は，次のようにして 16 進数の $DA_{(16)}$ に変形できる．

$1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 0$

$= (1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1) \times 16 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 0 = 13 \times 16 + 10$

このように，2 進数は下の方から 4 桁ずつ区切って，16 の累乗をくくり出せば簡単に 16 進数に変換できる．逆の変換も同様に計算できる．

注意　コンピュータの内部のデータは 2 進数で表されているので，それを人間が見やすい形にするために 16 進数が用いられる．たとえば日本語の文字には 2 進 16 桁の番号がつけられているが，この番号は 16 進では 4 桁になる．

確認問題 6　次の問に答えよ．ただし 16 進数の表し方は上記と同様にするものとする．

□(1)　十進数 10000 を，16 進数で表せ．

□(2)　16 進数 $FF_{(16)}$ を十進数で表せ．

□(3)　2 進数 $10100100_{(2)}$ を 16 進数で表せ．

□(4)　16 進数 $7B_{(16)}$ を 2 進数で表せ．

練成問題　A

1　次の数を十進法で表せ.　(⇨ ポイント 1)

□(1)　$101101_{(2)}$　□(2)　$2211_{(3)}$　□(3)　$1654_{(7)}$

2　次の十進数を与えられた n により n 進数で表せ.　(⇨ ポイント 2)

□(1)　1024,　$n=2$　□(2)　531,　$n=5$

□(3)　1876,　$n=3$　□(4)　2346,　$n=7$

3　次の n 進法の小数を十進法の小数で表せ.　(⇨ ポイント 3)

□(1)　$101.011_{(2)}$　□(2)　$31.44_{(5)}$

4　次の n 進法の小数を，十進法の整数と，十進法で表された 0 以上 1 未満の分数との和で表せ.　(⇨ ポイント 3)

□(1)　$1.112_{(3)}$　□(2)　$35.14_{(6)}$

5　次の 2 進数の四則計算を 2 進数のまま筆算で行え.　(⇨ ポイント 4)

□(1)　$11101+1011$　□(2)　$11101-1011$

□(3)　11011×101　□(4)　$100001\div1011$

6　次の分数を循環小数で表せ．また循環節を求めよ.　(⇨ ポイント 5)

□(1)　$\dfrac{7}{24}$　□(2)　$\dfrac{51}{82}$　□(3)　$\dfrac{137}{351}$

7　次の問に答えよ．ただし 16 進数の表し方はポイント 6 と同様とする.　(⇨ ポイント 6)

□(1)　十進数 3031 を 16 進数で表せ.　□(2)　16 進数 $12\mathrm{A}_{(16)}$ を十進数で表せ.

□(3)　2 進数 $1100101_{(2)}$ を 16 進数で表せ.　□(4)　16 進数 $89_{(16)}$ を 2 進数で表せ.

練成問題　B

1 □　5 進法では加法・乗法は右のような表で表される．このうち乗法の表は，十進法の九九に相当するものである．

3 進法・6 進法・7 進法のそれぞれの場合について，これと同じような表を作成せよ．

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

2　上の表を参考にして，次の 5 進法の計算を，5 進法のまま筆算で行え．なお，この問題中では右下の $_{(5)}$ は省略してある．

□(1)　$431 + 143$　　□(2)　$1132 - 344$

□(3)　342×14　　□(4)　$331 \div 23$

3　次の問に答えよ．

□(1)　$1110111_{(2)}$ を 5 進法で表せ．　　□(2)　$1342_{(7)}$ を 3 進法で表せ．

4　次の問に答えよ．

□(1)　$\dfrac{7}{44}$ を循環小数で表したとき，小数第 100 位の数を求めよ．

□(2)　$\dfrac{101}{143}$ を循環小数で表したとき，小数第 100 位の数を求めよ．

5　次の問に答えよ．

□(1)　2 進法の割り算を筆算で行うことにより，十進法で表された $\dfrac{1}{3}$ を 2 進法の循環小数で表せ．

□(2)　3 進法の割り算を筆算で行うことにより，十進法で表された $\dfrac{1}{5}$ を 3 進法の循環小数で表せ．