# 29　累乗根とその性質

## ポイント1　累乗根と $\sqrt[n]{a}$

2 乗すると $a$ になる数のことを $a$ の平方根あるいは 2 乗根という。3 乗すると $a$ になる数のことを $a$ の立法根あるいは3乗根という。一般に $n$ を自然数とするとき，**$n$ 乗すると $a$ になる数**のことを **$a$ の $n$ 乗根**という。($a$ の $n$ 乗根)$^n = a$ である。$a$ の $n$ 乗根はいつも個数が一定であるとは限らない。

**1)** $n$ が偶数で $a$ が正のとき：2，$-2$ を 2 乗するとともに 4 になることからもわかるように，$a$ の $n$ 乗根は正負 1 つずつ計 2 個出てくる。このうち，正の数のことを特に $\sqrt[n]{a}$ で表す。したがってこの場合，$a$ の $n$ 乗根は 2 個で，それは $\sqrt[n]{a}$ と $-\sqrt[n]{a}$ である。

**2)** $n$ が偶数で $a$ が負のとき:偶数乗して負になる数は存在しないので，この場合，$a$ の $n$ 乗根は存在しない。

**3)** $n$ が奇数のとき：$a$ の正負にかかわらず，$a$ の $n$ 乗根はただ 1 つ存在する。したがって **1)** と同様，この数のことを $\sqrt[n]{a}$ と表す。

**注意**　「$a$ の $n$ 乗根」と $\sqrt[n]{a}$ は同じものではない。$n$ が奇数のときには，両方は一致するが，$a$ が正で $n$ が偶数のとき，「$a$ の $n$ 乗根」は 2 つあり，$\sqrt[n]{a}$ はそのうちの一方を表しているにすぎない。

**例**　(1)　$2^4 = 4^2 = 16$ なので　$\sqrt[4]{16} = 2$，$\sqrt{16} = 4$

16 の 4 乗根は 2，$-2$ の 2 つ，16 の平方根は 4，$-4$ の 2 つ

(2)　$(-3)^3 = -27$ なので　$\sqrt[3]{-27} = -3$

$-27$ の立方根は $-3$ のみ

**確認問題 1　次の値を求めよ。**

□(1)　64 の平方根　　□(2)　$\sqrt[3]{-64}$　　□(3)　81 の 4 乗根　　□(4)　$\sqrt{0.01}$

## ポイント2　累乗根の性質(1)

$a$，$b > 0$，$m$，$n$ は自然数とする。

**1)**　$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$　　　**2)**　$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

**例**　(1)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**注意**　$\sqrt{\phantom{a}}$ を含んだ式が分母にあるとき，式全体の値を変えずに分母を整数に書き直すことを，有理化という。

(2)　$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$　　(3)　$\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{6}{2}} = \sqrt{3}$

こうした方法を使いこなすことにより，$\sqrt[n]{a}$ を含んだ複雑な式を，より簡単な式に変形することができる。

**例題**　次の式を簡単にせよ。

(1)　$\sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{27}$　　(2)　$\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{6}}$　　(3)　$\sqrt{48}$

**(解答)** (1)　$\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{81}=3$

(2)　$\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{6}}=\dfrac{3\times\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{2}}=\dfrac{(\sqrt[3]{3})^3}{\sqrt[3]{3}}=(\sqrt[3]{3})^2=\sqrt[3]{9}$

(3)　$\sqrt{48}=\sqrt{16}\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

**確認問題 2**　次の式を簡単にせよ。

□(1)　$\sqrt[3]{500}$　　□(2)　$\sqrt[3]{16}\times\sqrt[3]{28}$　　□(3)　$\dfrac{\sqrt[3]{750}}{\sqrt[3]{6}}$

## ポイント３　累乗根の性質(2)

$a$，$b>0$，$m$，$n$ は自然数とする。

**1)**　$(\sqrt[m]{a})^n=\sqrt[m]{a^n}$

**2)**　$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

これとポイント２の公式を用いることにより，さまざまな累乗根を含んだ式を簡単にすることができる。

**例題１**　次の式を簡単にせよ。

(1)　$\sqrt[4]{4}$　　(2)　$(\sqrt[3]{25})^2$　　(3)　$\sqrt{\sqrt[3]{100}}$

**(解答)** (1)　$\sqrt[4]{4}=\sqrt[4]{2^2}=(\sqrt[4]{2})^2=\sqrt{2}$

(2)　$(\sqrt[3]{25})^2=\left((\sqrt[3]{5})^2\right)^2=(\sqrt[3]{5})^4=5\times\sqrt[3]{5}=5\sqrt[3]{5}$

(3)　$\sqrt{\sqrt[3]{100}}=\sqrt[6]{100}=\sqrt[6]{10^2}=(\sqrt[6]{10})^2=\sqrt[3]{10}$

**例題２**　次の式を簡単にせよ。

(1)　$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$　　(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$　　(3)　$\dfrac{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{21}}{\sqrt[3]{3}}$

**(解答)** (1)　$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+3=5+2\sqrt{6}$

(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1}=\sqrt{2}+1$

(3)　$\dfrac{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{21}}{\sqrt[3]{3}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{7}$

**確認問題 3**　次の式を簡単にせよ。

□(1)　$\sqrt[4]{9}$　　□(2)　$(\sqrt[4]{18})^2$　　□(3)　$\sqrt{\sqrt{81}}$

□(4)　$\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$　　□(5)　$(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{12})\sqrt[3]{2}$

# 練成問題　A

**1**　次の値を求めよ。　　(⇨ ポイント１)

□(1)　$\sqrt{144}$　　□(2)　144 の 2 乗根

□(3)　$\sqrt[3]{-125}$　　□(4)　$-125$ の 3 乗根

□(5)　$-\sqrt{196}$　　□(6)　$\sqrt{0.09}$

**2**　次の式を簡単にせよ。　　(⇨ ポイント２)

□(1)　$\sqrt[3]{54}$　　□(2)　$\sqrt[4]{18} \times \sqrt{3}$

□(3)　$\sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{21}$　　□(4)　$\dfrac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$

□(5)　$\dfrac{\sqrt[4]{2000}}{\sqrt[4]{5}}$　　□(6)　$\dfrac{\sqrt{10}\sqrt{15}}{\sqrt{6}}$

**3**　次の式を簡単にせよ。　　(⇨ ポイント３)

□(1)　$(\sqrt[6]{18})^3$　　□(2)　$\sqrt[6]{27}$

□(3)　$\sqrt{\sqrt[3]{56}}$　　□(4)　$\sqrt{\sqrt{64}}$

□(5)　$\sqrt[3]{45^2} \times \sqrt[3]{5}$　　□(6)　$\sqrt[3]{\sqrt{216}}$

**4**　次の式を簡単にせよ。　　(⇨ ポイント３)

□(1)　$\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$　　□(2)　$\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$

□(3)　$\left(\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$　　□(4)　$\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-1} \times \dfrac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}$

□(5)　$\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

# 練成問題　B

**1**　次の値を求めよ。

□(1)　125 の平方根　　□(2)　$-0.001$ の立方根

□(3)　$\sqrt[4]{256}$　　□(4)　$-\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}$

**2**　次の式を簡単にせよ。

□(1)　$\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{6}$　　□(2)　$\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{8}}\times\sqrt[3]{9}$

□(3)　$\sqrt[3]{108}\times\sqrt[3]{32}\times\sqrt[3]{20}$　　□(4)　$\dfrac{\sqrt[3]{14}\times\sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{42}}$

□(5)　$\sqrt{(\sqrt{2}+1)^4}$　　□(6)　$\sqrt[3]{\sqrt[4]{256}}\times\sqrt[3]{6}$

**3**　次の式の分母を有理化せよ。

□(1)　$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$　　□(2)　$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$

□(3)　$\sqrt{\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}}$　　□(4)　$\sqrt{\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}}$

□(5)　$\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}\right)^3$

**4**　次の２つの数の大小を比較して大きい方を答えよ。

□(1)　$\sqrt[3]{-32}$ と $-\sqrt{9}$　　□(2)　$\sqrt[3]{\dfrac{125}{27}}$ と $\sqrt{2.25}$

□(3)　$\sqrt{\sqrt{144}}$ と $\sqrt{16}$　　□(4)　$\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ と $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}$

# 30 指数の拡張

以下 $a$ は正の数を表すものとする。$m$, $n$ が自然数のとき，次の公式が成り立つ。これを**指数法則**と呼ぶ。

$$\begin{cases} a^m \times a^n = a^{m+n} \\ (a^m)^n = a^{mn} \end{cases}$$

## ポイント1 指数の拡張(1)：指数が整数

1) $n$ が正の整数（すなわち自然数）のとき，通常どおり，$a^n$ は $a$ の $n$ 個の積

2) $n=0$ のとき，$a^0=1$

3) $n$ が負の整数のとき，$n=-m$（$m$ は自然数）とおいて，

$$a^n = a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

と定める。このように決めることにより，$a$ の指数が一般の整数の場合にも意味を決めることができる。大切なことは約束 1)，2)，3) の下でも，指数法則は依然として成り立っていることである。つまり，$m$, $n$ が整数のとき，

$$\begin{cases} a^m \times a^n = a^{m+n} \\ (a^m)^n = a^{mn} \end{cases}$$

**例題** 次の値を求めよ。

(1) $3^{-2}$　(2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$　(3) $3^4 \cdot 3^{-6}$　(4) $(2^{-3})^2$

（解答）(1) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

(2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{\frac{9}{16}} = \frac{16}{9}$

(3) $3^4 \cdot 3^{-6} = 3^4 \times 3^{-6} = 3^{4-6} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

(4) $(2^{-3})^2 = 2^{-6} = \frac{1}{64}$

**確認問題** 1 上の例題にならって，次の値を指数のない分数の形に書き直せ。

□(1) $5^{-1}$　□(2) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}$　□(3) $4^2 \cdot 4^{-3}$

## ポイント2 指数の拡張(2)：指数が有理数

$r$ が有理数なら

$$r = \frac{q}{p} \quad (p \text{ は自然数，} q \text{ は整数，} p,\ q \text{ は互いに素})$$

の形にただ1通りに書くことができる。

このとき，

$$a^r = \sqrt[p]{a^q}$$

と決める。この約束によって，$a$ の指数が一般の有理数の場合にも意味を決めることができる。

大切なことは，この決まりの下で，指数法則は依然としてそのままの形で成り立っていることである。つまり，$m$，$n$ が有理数のとき

$$\begin{cases} a^m \times a^n = a^{m+n} \\ (a^m)^n = a^{mn} \end{cases}$$

**注意**　ポイント1→ ポイント2は，指数を 自然数→整数→有理数 へと拡げて行く過程であった。したがって，自然数，整数，有理数の意味をはっきりさせておかないと，ポイント1，2の意味がしっかりつかめない。自然数，整数，有理数の定義を復習しておくこと。

以上の取り決めにより，前セクションで扱った $\sqrt[n]{a}$ をすべて $a^r$（$r$ は有理数）の形に書くことができるようになった。これを利用して累乗根の計算も一層見通しよくできるようになる。

**例題1**　次の値を $2^r$ の形に書け。

(1) $\frac{1}{4}$　　(2) $\sqrt{2}$　　(3) $\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$　　(4) $\frac{16}{\sqrt[3]{2}}$

**(解答)** (1) $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$　　(2) $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

(3) $\frac{1}{\sqrt[4]{8}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}} = 2^{-\frac{3}{4}}$　　(4) $\frac{16}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2^4}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{4-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{11}{3}}$

**例題2**　次の値を求めよ。

(1) $2^{-\frac{1}{2}}$　　(2) $6^{\frac{3}{2}}$　　(3) $8^{\frac{5}{3}}$　　(4) $125^{\frac{1}{3}}$

**(解答)** (1) $2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$　　(2) $6^{\frac{3}{2}} = 6 \times 6^{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{6}$

(3) $8^{\frac{5}{3}} = (2^3)^{\frac{5}{3}} = 2^5 = 32$　　(4) $125^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{3}} = 5$

**例題3**　次の式を指数法則を用いて $a^r$ の形に計算せよ。

(1) $a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{2}{3}}$　　(2) $(a^{-\frac{1}{2}})^{\frac{4}{3}}$　　(3) $(a^{\frac{1}{6}} \times a^{\frac{1}{3}})^2$　　(4) $\sqrt[3]{a} \times a^{\frac{1}{6}}$

**(解答)** (1) $a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{4}+\frac{2}{3}} = a^{\frac{3+8}{12}} = a^{\frac{11}{12}}$　　(2) $(a^{-\frac{1}{2}})^{\frac{4}{3}} = a^{-\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}} = a^{-\frac{2}{3}}$

(3) $(a^{\frac{1}{6}} \times a^{\frac{1}{3}})^2 = (a^{\frac{1+2}{6}})^2 = (a^{\frac{1}{2}})^2 = a$　　(4) $\sqrt[3]{a} \times a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{2}}$

**確認問題2**　次の問に答えよ。

(1) 次の値を $2^r$ の形に書け。

□① $\frac{1}{8}$　　□② $4\sqrt{2}$　　□③ $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$　　□④ $\sqrt[4]{8}$

(2) 次の値を求めよ。

□① $8^{-\frac{1}{3}}$　　□② $121^{-\frac{1}{2}}$　　□③ $(125^2)^{\frac{1}{3}}$　　□④ $144^{-\frac{1}{4}}$

(3) 次の式を指数法則を用いて $a^r$ の形に計算せよ。

□① $a^{\frac{2}{5}} \times a^{\frac{1}{3}}$　　□② $a^{\frac{3}{4}} \times a^{-\frac{1}{2}}$

□③ $(a^{\frac{2}{5}} \times a^{\frac{1}{4}})^2$　　□④ $\frac{1}{\sqrt{a}} \times a^{\frac{2}{3}}$

# 練成問題 A

**1** 次の値を求めよ。 (⇨ ポイント 1)

□(1) $4^{-2}$　□(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$　□(3) $(0.1)^{-3}$

□(4) $2^{-3}\cdot 6^2$　□(5) $\left(\frac{1}{12}\right)^{-2}$

**2** 次の値を $3^r$ の形に書け。 (⇨ ポイント 2)

□(1) $\frac{1}{9}$　□(2) $\sqrt[3]{81}$

□(3) $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$　□(4) $\sqrt[4]{9}$

**3** 次の値を求めよ。 (⇨ ポイント 2)

□(1) $36^{-\frac{3}{2}}$　□(2) $8^{\frac{5}{3}}$

□(3) $169^{-\frac{1}{2}}$　□(4) $\left(500^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$

**4** 次の式を指数法則を用いて $a^r$ の形に計算せよ。 (⇨ ポイント 2)

□(1) $a^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}$　□(2) $a^{\frac{3}{4}}\div a^{\frac{1}{2}}$

□(3) $a^{-\frac{1}{2}}\div a^{-\frac{1}{3}}$　□(4) $\left(a^{-\frac{5}{6}}\right)^3$

**5** 次の(1)〜(5)については指数法則を用いて $a^r$ の形に計算し，(6)，(7)についてはその値を求めよ。
(⇨ ポイント 2)

□(1) $a^{-\frac{1}{3}}\times a^{\frac{3}{4}}$　□(2) $a^{-\frac{1}{5}}\div a^{-\frac{1}{2}}$　□(3) $\left(a^{\frac{3}{8}}\right)^2$

□(4) $\left(a^{\frac{1}{9}}\div a^{\frac{1}{6}}\right)^3$　□(5) $\left(a^{-\frac{1}{4}}\div\sqrt{a}\right)^2$　□(6) $\sqrt[3]{4}\times\frac{\sqrt[3]{2}}{16}$

□(7) $\sqrt[6]{10}\times\sqrt[3]{80}\times\sqrt{5}$

# 練成問題　B

*1*　次の値を求めよ。(分数になったときは分母を有理化すること)

□(1)　$27^{\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{1}{4}} \div \sqrt{6}$　□(2)　$\left(\sqrt{63} \times \dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$　□(3)　$\left\{\left(\dfrac{4}{27}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}^2$

□(4)　$\sqrt{512^{\frac{2}{3}}}$　□(5)　$\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^4 \times 16\right\}^{\frac{1}{2}}$　□(6)　$\left\{(\sqrt{2} \times 3)^{\frac{1}{2}} \times 3\right\}^2$

*2*　次の値を $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ の形に書け。

□(1)　$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{10}}$　□(2)　$8^{\frac{1}{4}} \cdot 10^{\frac{1}{3}}$　□(3)　$\dfrac{\sqrt{18}}{24}$

□(4)　$180^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{60}$　□(5)　$40^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{108}$　□(6)　$(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5)^{\frac{1}{5}}$

*3*　次の式を計算せよ。ただし $a$ は正の実数とする。

□(1)　$\dfrac{(1 + 2^{\frac{1}{3}})^3}{3}$　□(2)　$(\sqrt[3]{5} - 1)\left(5^{\frac{2}{3}} + 5^{\frac{1}{3}} + 1\right)$　□(3)　$\left(3^{\frac{4}{3}} - 3^{\frac{2}{3}} + 1\right)\left(3^{\frac{2}{3}} + 1\right)$

□(4)　$(a^{\frac{1}{4}} + a^{-\frac{1}{4}})^2$　□(5)　$\dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}}$

*4*　次の方程式を解け。ただし $x = 2^a \cdot 3^b$ の形で答えること。

□(1)　$\sqrt{2}\,x = 6^{\frac{1}{3}}$　□(2)　$\sqrt[3]{18}\,x = 3$　□(3)　$3x^{\frac{3}{4}} = \sqrt{12}$

□(4)　$\left(\dfrac{24}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{3}} = 8$　□(5)　$x^{\frac{1}{3}}\sqrt{8} = \sqrt{x}\,3^{\frac{1}{3}}$　□(6)　$\sqrt{x}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{72}\,x^{\frac{3}{4}}$

*5*　次の２つの数を比較し，大きい方を答えよ。

□(1)　$64^{\frac{1}{4}}$，$\dfrac{3}{2}$　□(2)　$6^{\frac{1}{3}}$，$5^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}}$

□(3)　$12^{\frac{1}{4}}$，$3^2 \cdot 5^{-1}$　□(4)　$10^{\frac{3}{4}}$，$2^{\frac{8}{3}}$

# 31 指数関数とそのグラフ

## ポイント1 指数関数 $a^x$ の決め方

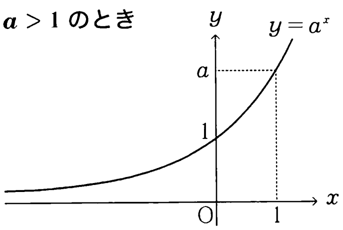
$a$ は正の実数とする。$x$ が有理数の場合，前のセクションで $a^r$ の値の意味を定めた。じつは $x$ が無理数の場合も $r$ が有理数の場合の $a^r$ の値を利用することによって $a^x$ の値をただ1つ決めることができる。

この方法により，$a$ の指数が一般の実数の場合も $a^x$ の値を決めることができる。大切なことは，こうして決めた $a^x$ の値についても指数法則が依然として成り立っていることである。つまり，$x$, $x'$ が実数のとき，

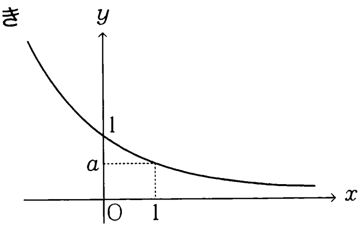
$$a^x \times a^{x'} = a^{x+x'}, \quad (a^x)^{x'} = a^{xx'}$$

$a^x$ は任意の実数 $x$ に対して意味が決まったので，関数 $y = a^x$ のグラフを考えることができる。
その概形は次のようになる。

**$a > 1$ のとき**



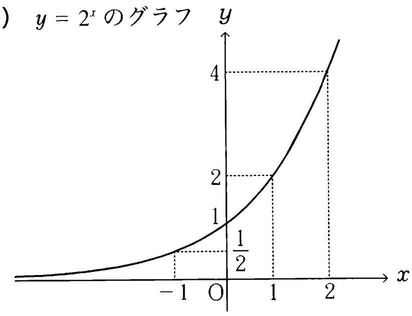

**$0 < a < 1$ のとき**



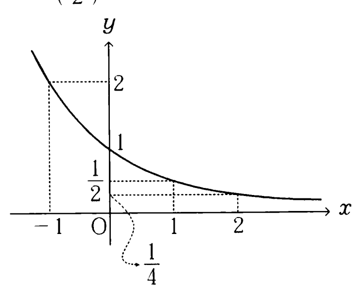

関数 $y = a^x$ を，$a$ を底とする**指数関数**と呼ぶ。

**例題** $y = 2^x$，$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **のグラフの概形をかけ。**

**(解答)** $y = 2^x$ のグラフ




$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフ




**確認問題** 1□ $y = 3^x$, $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ **のグラフの概形をかけ。**

## ポイント2 指数方程式(1)

$y = a^x$ に共通した性質として，

1) $x$ 軸の上にしか出てこない（すべての $x$ に対して $a^x > 0$ である）
2) 必ず $(0,\ 1)$ を通り，$x$ 軸が漸近線になる
3) $a > 1$ のとき，$u < v \iff a^u < a^v$
   $0 < a < 1$ のとき，$u < v \iff a^u > a^v$

この3つの性質のなかで，3) は特に大切である。3) によって，指数関数の値 $y$ が与えられたとき，$y = a^x$ を満たす $x$ はただ1つであることがわかる。

例題 方程式 $3^{x-1}=27$ を解け。

（解答） $27=3^3$。$3>1$ なので，上の性質 3) により，$3^{x-1}=3^3$ を満たす $x-1$ の値はただ1つしか存在しない。

よって，$x-1=3$　　ゆえに　$x=4$

確認問題 2　次の方程式を解け。

□(1)　$2^{x+4}=16$　　□(2)　$3^{2x-1}=9$　　□(3)　$5^{-2x+1}=\frac{1}{25}$

## ポイント3 指数不等式(1)

例題1 不等式 $2^{2x-1}<16$ を解け。

（解答） $16=2^4$。$2>1$ なので，ポイント2の性質 3) により，$2x-1<4$ なら $2^{2x-1}<2^4$ を満たすし，逆も正しい。

よって，$2x-1<4$　　ゆえに　$x<\frac{5}{2}$

例題2 $(27)^{\frac{1}{4}}$ と $(81)^{\frac{1}{5}}$ の大小を比べ，大きい方を答えよ。

（解答） $(27)^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{3}{4}}$，$(81)^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{4}{5}}$

$\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$ なので，ポイント2の性質 3)より　$3^{\frac{3}{4}}<3^{\frac{4}{5}}$

よって，$(81)^{\frac{1}{5}}$ の方が大きい。

確認問題 3　次の問に答えよ。

(1)　次の不等式を解け。

□①　$3^{4x-1}>9$　　□②　$4^{3x+2}\leqq 256$　　□③　$2^{-3x+2}\geqq 2^{-4}$

(2)　次の2つの数の大小を比べ，大きい方を答えよ。

□①　$\sqrt[3]{25}$，$\sqrt[4]{125}$　　□②　$2^{-\frac{3}{2}}$，$\frac{1}{\sqrt[3]{16}}$　　□③　$\sqrt{27}$，$(\sqrt[4]{3})^7$

## ポイント4 指数方程式・不等式(2)

例題 方程式 $2^{2x}-5\cdot 2^x+4=0$ を解け。

（解答） $2^x=t$ とおくと，$t^2-5t+4=0$，　$(t-4)(t-1)=0$　　ゆえに　$t=4,\ 1$

$t=2^x$ なので，$2^x=4=2^2$，　$2^x=1=2^0$　　ゆえに　$x=2,\ 0$

注意　不等式も同様である。

$2^{2x}-5\cdot 2^x+4<0$

を解く場合。$2^x=t$ とおくと，$(t-4)(t-1)<0$，　$1<t<4$

$2^0<2^x<2^2$ より，再びポイント2の性質 3) を用いて　$0<x<2$

確認問題 4　次の方程式，不等式を解け。

□(1)　$3^{2x}-4\cdot 3^x+3=0$　　□(2)　$3^{2x}-4\cdot 3^x+3\geqq 0$

□(3)　$2^{2x}-12\cdot 2^x+32=0$　　□(4)　$2^{2x}-12\cdot 2^x+32<0$

# 練成問題 A

**1** 次の関数のグラフの概形をかけ。 (⇨ ポイント１)

□(1) $y=4^x$ □(2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

□(3) $y=\left(\frac{3}{4}\right)^x$ □(4) $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$

**2** 次の方程式を解け。 (⇨ ポイント２)

□(1) $2^{3x+1}=64$ □(2) $4\cdot 2^{2x+1}=\frac{1}{2}$ □(3) $3^{-x+3}=27$

□(4) $3^{\frac{x}{2}+1}=\frac{1}{3}$ □(5) $5^{-\frac{x}{2}-1}=1$ □(6) $5^{\frac{x}{3}+1}=\frac{1}{25}$

**3** 次の不等式を解け。 (⇨ ポイント３)

□(1) $2^{x+2}>\frac{1}{4}$ □(2) $3^{2x+1}\leqq\frac{1}{9}$ □(3) $3^{-\frac{x}{2}-1}\leqq 27$

□(4) $\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqq 8$ □(5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}>\frac{1}{9}$ □(6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}+1}\geqq\frac{\sqrt{2}}{2}$

**4** 次の２つの数の大小を比べ，大きい方を答えよ。 (⇨ ポイント３)

□(1) $\sqrt[5]{4}$, $2^{\frac{1}{3}}$ □(2) $\sqrt[7]{27}$, $\sqrt[5]{9}$

□(3) $\frac{1}{\sqrt[3]{36}}$, $6^{-\frac{1}{2}}$ □(4) $25\sqrt{5}$, $(\sqrt[3]{5})^7$

**5** 次の方程式，不等式を解け。 (⇨ ポイント４)

□(1) $2\cdot 2^{2x}-3\cdot 2^x+1=0$ □(2) $2^{2x+1}-3\cdot 2^x+1<0$

□(3) $3^3\cdot 3^{2x}-12\cdot 3^x+1=0$ □(4) $3^{2x+3}-2^2\cdot 3^{x+1}+1\geqq 0$

□(5) $2^{2x}-2^{\frac{3}{2}}\cdot 2^x+2=0$ □(6) $2^{2x}-(2+\sqrt{2})2^x+2\sqrt{2}\leqq 0$

# 練成問題　B

**1**　次の関数のグラフの概形をかけ。さらに，そのグラフは $y = 2^x$ のグラフとどんな位置関係にあるか答えよ。

□(1)　$y = 2^{x-2}$ の $0 \leqq x \leqq 4$ の部分　　□(2)　$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ の $-2 \leqq x \leqq 2$ の部分

□(3)　$y = 2^x - 2$ の $-2 \leqq x \leqq 2$ の部分　　□(4)　$y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$ の $-1 \leqq x \leqq 2$ の部分

**2**　次の方程式を解け。

□(1)　$4^{\frac{1+x}{4}} = 2^{2x+1}$　　□(2)　$3^{-x+3} = 9^{\frac{x}{3}-1}$　　□(3)　$4^{\sqrt{x}} = 2^3$

□(4)　$5^{\frac{x+1}{2}} = \sqrt{25}$　　□(5)　$\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-1} = 3^{2+x}$

**3**　次の不等式を解け。

□(1)　$2^{\frac{3x}{4}+1} \leqq 4$　　□(2)　$\frac{1}{2} \leqq 2^{\frac{x}{2}+1} \leqq 8$　　□(3)　$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2x-1}{5}} \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}$

□(4)　$\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-1} \geqq 3^{x+1}$　　□(5)　$\left(\frac{1}{2}\right)^{6x+1} \leqq 4^{2x-5}$

**4**　次の方程式を解け。

□(1)　$5 \cdot 5^{2x} - 26 \cdot 5^x + 5 = 0$　　□(2)　$4^{x+2} - 3 \cdot 2^{x+\frac{3}{2}} + 1 = 0$

**5**　次の不等式を解け。

□(1)　$(2^x - 1)^2 > 0$　　□(2)　$2 \cdot 4^x + 1 \leqq -6(4^x - 2^x)$

**6**　次の数を大きい順に並べよ。

□(1)　$\sqrt[5]{16}$，$\sqrt[3]{4}$，$\sqrt[8]{128}$　　□(2)　$1$，$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{6}}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{7}}$　　□(3)　$\frac{1}{\sqrt[4]{125}}$，$\frac{\sqrt[7]{25}}{5}$，$\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$