

29 累乗根とその性質 (P 152 ~ P 155)

◇確認問題 (P 152 ~ P 153)

- 1 (1) 8, -8 (2) -4 (3) 3, -3 (4) 0.1
2 (1) $5\sqrt[3]{4}$ (2) $4\sqrt[3]{7}$ (3) 5

【解説】

- (1) $\sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{4}$
(2) $\sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{28} = (\sqrt[3]{2})^4 \times (\sqrt[3]{2})^2 \times \sqrt[3]{7}$
(3) $\frac{\sqrt[3]{750}}{\sqrt[3]{6}} = \frac{\sqrt[3]{5^3 \times \sqrt[3]{6}}}{\sqrt[3]{6}}$

- 3 (1) $\sqrt{3}$ (2) $3\sqrt{2}$ (3) 3 (4) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$
(5) $2 + 2\sqrt[3]{3}$

【解説】

- (1) $\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = (\sqrt[4]{3})^2$
(2) $(\sqrt[4]{18})^2 = \{(\sqrt[4]{3})^2 \times \sqrt[4]{2}\}^2 = (\sqrt[4]{3})^4 \times (\sqrt[4]{2})^2$
(3) $\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt[4]{81}$
(4) $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}$
 $= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}$
(5) $(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{12})\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{8 \times 3}$

◇練成問題A (P 154)

- 1 (1) 12 (2) 12, -12 (3) -5 (4) -5
(5) -14 (6) 0.3
2 (1) $3\sqrt[3]{2}$ (2) $3\sqrt[4]{2}$ (3) $3\sqrt[3]{7}$ (4) 3
(5) $2\sqrt{5}$ (6) 5

【解説】

- (1) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{2}$
(2) $\sqrt[4]{18} \times \sqrt{3} = \sqrt[4]{9} \times \sqrt[4]{2} \times \sqrt{3} = (\sqrt[4]{3})^2 \times \sqrt[4]{2}$
(3) $\sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{21} = \sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{7}$
(4) $\frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{4}}$
(5) $\frac{\sqrt[4]{2000}}{\sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{25} \times \sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{25} \times \sqrt[4]{16}$
(6) $\frac{\sqrt{10} \sqrt{15}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5}}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}$

- 3 (1) $3\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{3}$ (3) $\sqrt{2} \sqrt[6]{7}$ (4) $2\sqrt{2}$
(5) $15\sqrt[3]{3}$ (6) $\sqrt{6}$

【解説】

- (1) $(\sqrt[6]{18})^3 = \sqrt{18}$
(2) $\sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{3^3}$
(3) $\sqrt[3]{56} = \sqrt[3]{2^3 \times 7} = \sqrt{2} \sqrt[3]{7} = \sqrt{2} \times \sqrt[3]{7}$
(4) $\sqrt{\sqrt{64}} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt[4]{2^4} \times \sqrt[4]{2^2}$
(5) $\sqrt[3]{(45)^2} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{3^4 \times 5^2} \times \sqrt[3]{5}$
 $= \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{5^3} \times \sqrt[3]{3}$

$$(6) \sqrt[3]{\sqrt{216}} = \sqrt[6]{6^3}$$

- 4 (1) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}$ (2) $2\sqrt{3} + \sqrt{6}$ (3) $\frac{16}{3}$
(4) $\frac{1}{2}$ (5) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

【解説】

- (1) 与式 $= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2}$
(2) 与式 $= \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{6} + \sqrt{3})}{(\sqrt{6} - \sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{3})}$
 $= \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{6} + \sqrt{3})}{3} = \sqrt{12} + \sqrt{6}$
(3) 与式 $= (\sqrt{3})^2 + 2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$
(4) 与式 $= \frac{1}{\sqrt[3]{27} - 1}$
(5) 与式 $= \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{6}}{4}$

◇練成問題B (P 155)

- 1 (1) $5\sqrt{5}$, $-5\sqrt{5}$ (2) -0.1 (3) 4 (4) $-\frac{3}{2}$
2 (1) $2\sqrt[3]{3}$ (2) 3 (3) $24\sqrt[3]{5}$ (4) $\sqrt[3]{5}$
(5) $3 + 2\sqrt{2}$ (6) $2\sqrt[3]{3}$

【解説】

- (1) 与式 $= (\sqrt[3]{2})^2 \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3}$
(2) 与式 $= \frac{\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{8}} \times (\sqrt[3]{3})^2$
(3) 与式 $= (\sqrt[3]{2})^2 \times (\sqrt[3]{3})^3 \times (\sqrt[3]{2})^5 \times (\sqrt[3]{2})^2 \times \sqrt[3]{5}$
(4) 与式 $= \frac{\sqrt[3]{14} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{14} \times \sqrt[3]{3}}$
(5) 与式 $= (\sqrt{2} + 1)^2$
(6) 与式 $= \sqrt[3]{4 \times 2^8} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3} = (\sqrt[3]{2})^2 \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3}$

- 3 (1) $2 - \sqrt{3}$ (2) $\frac{1}{3}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)$
(3) $\sqrt{2} - 1$ (4) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (5) $\frac{3\sqrt{3} - 5}{4}$

【解説】

- (1) 与式 $= \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{8 - 2\sqrt{12}}{4}$
(2) 与式 $= \frac{(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)}{(\sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)} = \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}{(\sqrt[3]{2})^3 + 1}$
(3) $3 + 2\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2} + 1)^2$
与式 $= \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{2} + 1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)}$

$$(4) \quad 5 + 2\sqrt{6} = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad \text{与式} &= \frac{1}{(1 + \sqrt{3})^3} \times \frac{(\sqrt{3} - 1)^3}{(\sqrt{3} - 1)^3} \\ &= \frac{(\sqrt{3} - 1)^3}{\{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)\}^3} \\ &= \frac{(\sqrt{3})^3 - 3(\sqrt{3})^2 + 3\sqrt{3} - 1}{2^3} \\ &= \frac{6\sqrt{3} - 10}{8} \end{aligned}$$

$$4(1) \quad -\sqrt{9} \quad (2) \quad \sqrt[3]{\frac{125}{27}} \quad (3) \quad \sqrt{16} \quad (4) \quad \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$$

【解説】

$$(1) \quad -\sqrt{9} = -3, \quad (-3)^3 = -27 > -32$$

$$(2) \quad \sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{5}{3}, \quad \sqrt{2.25} = 1.5$$

$$(3) \quad \sqrt{\sqrt{144}} = \sqrt{12}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \frac{1}{2 + \sqrt{3}} &= \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = 2 - \sqrt{3} \\ \sqrt[3]{\frac{1}{8}} &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} &> 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

30 指数の拡張 (P 156 ~ P 159)

◇確認問題 (P 156 ~ P 157)

$$1(1) \quad \frac{1}{5} \quad (2) \quad \frac{49}{9} \quad (3) \quad \frac{1}{4}$$

【解説】

$$(1) \quad 5^{-1} = \frac{1}{5^1}$$

$$(2) \quad \left(\frac{3}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{3}\right)^2$$

$$(3) \quad 4^2 \times 4^{-3} = 4^{2+(-3)} = 4^{-1}$$

$$2(1) \textcircled{1} \quad 2^{-3} \quad \textcircled{2} \quad 2^{\frac{5}{2}} \quad \textcircled{3} \quad 2^{-\frac{1}{3}} \quad \textcircled{4} \quad 2^{\frac{3}{4}}$$

$$(2) \textcircled{1} \quad \frac{1}{2} \quad \textcircled{2} \quad \frac{1}{11} \quad \textcircled{3} \quad 25 \quad \textcircled{4} \quad \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$(3) \textcircled{1} \quad a^{\frac{11}{15}} \quad \textcircled{2} \quad a^{\frac{1}{4}} \quad \textcircled{3} \quad a^{\frac{13}{10}} \quad \textcircled{4} \quad a^{\frac{1}{6}}$$

【解説】

$$(1) \textcircled{1} \quad \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$$

$$\textcircled{2} \quad 4\sqrt{2} = 2^2 \times 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}$$

$$\textcircled{4} \quad \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2^3}$$

$$(2) \textcircled{1} \quad 8^{-\frac{1}{3}} = (2^3)^{-\frac{1}{3}} = 2^{-1}$$

$$\textcircled{2} \quad 121^{-\frac{1}{2}} = (11^2)^{-\frac{1}{2}} = 11^{-1}$$

$$\textcircled{3} \quad (125^2)^{\frac{1}{3}} = \{(5^3)^2\}^{\frac{1}{3}} = 5^2$$

$$\textcircled{4} \quad 144^{-\frac{1}{4}} = (2^4 \times 3^2)^{-\frac{1}{4}} = 2^{-1} \times 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$(3) \textcircled{1} \quad a^{\frac{2}{5} + \frac{1}{3}}$$

$$\textcircled{2} \quad a^{\frac{3}{4} + (-\frac{1}{2})}$$

$$\textcircled{3} \quad a^{2(\frac{2}{5} + \frac{1}{4})}$$

$$\textcircled{4} \quad a^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}$$

◇練習問題A (P 158)

$$1(1) \quad \frac{1}{16} \quad (2) \quad \frac{27}{8} \quad (3) \quad 1000 \quad (4) \quad \frac{9}{2} \quad (5) \quad 144$$

【解説】

$$(1) \quad \frac{1}{4^2} \quad (2) \quad \left(\frac{3}{2}\right)^3 \quad (3) \quad 10^3$$

$$(4) \quad \frac{2^2 \times 3^2}{2^3} \quad (5) \quad 12^2$$

$$2(1) \quad 3^{-2} \quad (2) \quad 3^{\frac{4}{3}} \quad (3) \quad 3^{\frac{2}{3}} \quad (4) \quad 3^{\frac{1}{2}}$$

【解説】

$$(1) \quad \frac{1}{3^2} \quad (2) \quad \sqrt[3]{3^4}$$

$$(3) \quad 3 \times \frac{1}{3^{\frac{1}{3}}} = 3 \times 3^{-\frac{1}{3}} = 3^{1 - \frac{1}{3}} \quad (4) \quad \sqrt[4]{3^2} = 3^{\frac{2}{4}}$$

$$3(1) \quad \frac{1}{216} \quad (2) \quad 32 \quad (3) \quad \frac{1}{13} \quad (4) \quad \frac{\sqrt{5}}{50}$$

【解説】

$$(1) \quad 36^{-\frac{3}{2}} = (36^{\frac{1}{2}})^{-3} = 6^{-3}$$

$$(2) \quad 8^{\frac{5}{3}} = (2^3)^{\frac{5}{3}} = 2^5$$

$$(3) \quad 169^{-\frac{1}{2}} = (13^2)^{-\frac{1}{2}} = 13^{-1}$$

$$(4) \quad (500^{\frac{1}{2}})^{-1} = (10\sqrt{5})^{-1} = \frac{1}{10\sqrt{5}}$$

$$4(1) \quad a^{\frac{5}{6}} \quad (2) \quad a^{\frac{1}{4}} \quad (3) \quad a^{-\frac{1}{6}} \quad (4) \quad a^{-\frac{5}{2}}$$

【解説】

$$(1) \quad a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}}$$

$$(2) \quad a^{\frac{3}{4}} \times a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}$$

$$(3) \quad a^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$$

$$(4) \quad a^{-\frac{5}{6} \times 3}$$

$$5(1) \quad a^{\frac{5}{12}} \quad (2) \quad a^{\frac{3}{10}} \quad (3) \quad a^{\frac{3}{4}} \quad (4) \quad a^{-\frac{1}{6}} \quad (5) \quad a^{-\frac{3}{2}}$$

$$(6) \quad \frac{1}{8} \quad (7) \quad 10\sqrt{2}$$

【解説】

$$(1) \quad \text{与式} = a^{-\frac{1}{3} + \frac{3}{4}}$$

$$(2) \quad \text{与式} = a^{-\frac{1}{5}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{5} + \frac{1}{2}}$$

$$(3) \quad \text{与式} = a^{\frac{3}{8} \times 2}$$

- (4) 与式 $= (a^{\frac{1}{9}} \times a^{-\frac{1}{6}})^3 = a^{\frac{2-3}{18} \times 3}$
 (5) 与式 $= (a^{-\frac{1}{4}} \times a^{-\frac{1}{2}})^2 = a^{-\frac{1+2}{4} \times 2}$
 (6) 与式 $= 2^{2 \times \frac{1}{3}} \times \frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^4} = 2^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} - 4}$
 (7) 与式 $= (2^{\frac{1}{6}} \times 5^{\frac{1}{6}}) \times (2^4 \times 5)^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{2}}$
 $= (2^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{4}{3}}) \times (5^{\frac{1}{6}} \times 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{2}}) = 2^{\frac{3}{2}} \times 5$

◇練習問題 B (P 159)

- 1 (1) $\sqrt{3}$ (2) $\frac{\sqrt[3]{84}}{2}$ (3) $\frac{2\sqrt[3]{2}}{9}$ (4) 8
 (5) 9 (6) $27\sqrt{2}$

【解説】

- (1) 与式 $= (3^3)^{\frac{1}{3}} \times (2^4)^{\frac{1}{4}} \times (2 \times 3)^{-\frac{1}{2}}$
 $= (2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{1}{2}}) = (3^1 \times 3^{-\frac{1}{2}}) = 3^{\frac{1}{2}}$
 (2) 与式 $= \{(3^2 \times 7)^{\frac{1}{2}} \times 7^{\frac{1}{2}} \times 2^{-1}\}^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{21}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$
 (3) 与式 $= (2^2 \times 3^{-3})^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} \times 3^{-2}$
 (4) 与式 $= \sqrt{(2^9)^{\frac{2}{3}}} = 2^{9 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}$
 (5) 与式 $= (2^{-4} \times 2^4 \times 3^4)^{\frac{1}{2}} = 3^2$
 (6) 与式 $= (\sqrt{2} \times 3)^{\frac{1}{2} \times 2} \times 3^2$

- 2 (1) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}}$ (2) $2^{\frac{13}{12}} \cdot 5^{\frac{1}{3}}$ (3) $2^{-\frac{5}{2}}$
 (4) $2^{\frac{3}{2}} \cdot 3 \cdot 5^{\frac{3}{4}}$ (5) $2^{-\frac{1}{3}} \cdot 3 \cdot 5^{-\frac{1}{3}}$ (6) $2^{\frac{3}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{5}} \cdot 5^{\frac{1}{5}}$

【解説】

- (1) $2^{\frac{1}{2}} \times (2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}) \times (2^{-\frac{1}{2}} \times 5^{-\frac{1}{2}})$
 $= 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 5^{-\frac{1}{2}}$
 (2) $2^{\frac{3}{4}} \times (2^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}}) = 2^{\frac{3}{4} + \frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}}$
 (3) $(2^{\frac{1}{2}} \times 3) \times (2^{-3} \times 3^{-1}) = 2^{\frac{1}{2} - 3} \times 3^{1-1}$
 (4) $(2^{\frac{2}{4}} \times 3^{\frac{2}{4}} \times 5^{\frac{1}{4}}) \times (2^{\frac{2}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}})$
 $= 2^{\frac{1}{2} + 1} \times 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}$
 (5) $\{2^{3(-\frac{1}{3})} \times 5^{-\frac{1}{3}}\} \times \{(2^2)^{\frac{1}{3}} \times (3^3)^{\frac{1}{3}}\}$
 $= 2^{-1 + \frac{2}{3}} \times 3^1 \times 5^{-\frac{1}{3}}$
 (6) $(2 \times 3 \times 2^2 \times 5)^{\frac{1}{3}}$

- 3 (1) $1 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}$ (2) 4 (3) 10
 (4) $2 + a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}$ (5) $\frac{\sqrt{a}}{a+1}$

【解説】

- (1) $(1 + 2^{\frac{1}{3}})^3 = 1 + 3 \times 2^{\frac{1}{3}} + 3 \times 2^{\frac{2}{3}} + 2^1$
 $= 3 + 3 \times 2^{\frac{1}{3}} + 3 \times 2^{\frac{2}{3}}$
 ゆえに 与式 $= \frac{1}{3} (3 + 3 \times 2^{\frac{1}{3}} + 3 \times 2^{\frac{2}{3}})$

- (2) 与式を展開すると、 $(\sqrt[3]{5})^3 - 1$ になる。
 (3) 与式を展開すると、 $3^{\frac{6}{3}} + 1$ になる。
 (4) 与式を展開すると、 $a^{\frac{4}{4}} + 2 + a^{-\frac{2}{4}}$ になる。
 (5) 与式 $= \frac{1}{a^{-\frac{1}{2}}(a+1)}$

- 4 (1) $x = 2^{-\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}$ (2) $x = 2^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}$ (3) $x = 2^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}$
 (4) $x = 2^{-12} \cdot 3^2$ (5) $x = 2^9 \cdot 3^{-2}$ (6) $x = 3^{-10}$

【解説】

- (1) $2^{\frac{1}{2}} x = 2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}$ ゆえに $x = 2^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}}$
 (2) $2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \times x = 3$ ゆえに $x = 2^{-\frac{1}{3}} \times 3^{1 - \frac{2}{3}}$
 (3) 両辺を $\frac{4}{3}$ 乗すると、
 $3^{\frac{4}{3}} x = 2^{\frac{4}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}$ ゆえに $x = 2^{\frac{4}{3}} \times 3^{\frac{2}{3} - \frac{4}{3}}$
 (4) 両辺を 3 乗すると、
 $\frac{24}{\sqrt{x}} = 2^9$ ゆえに $\sqrt{x} = 2^3 \times 3 \times 2^{-9}$
 (5) 両辺を 6 乗すると、 $x^2 \times 2^{\frac{3}{2} \times 6} = x^3 \times 3^{\frac{1}{3} \times 6}$
 ゆえに $x = 2^9 \times 3^{-2}$
 (6) 与式を整理すると、 $2^{\frac{3}{2}} \times 3^{-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \times 3 \times x^{\frac{1}{4}}$
 ゆえに $x^{\frac{1}{4}} = 3^{-\frac{3}{2} - 1}$

- 5 (1) $64^{\frac{1}{4}}$ (2) $6^{\frac{1}{3}}$ (3) $12^{\frac{1}{4}}$ (4) $2^{\frac{8}{3}}$

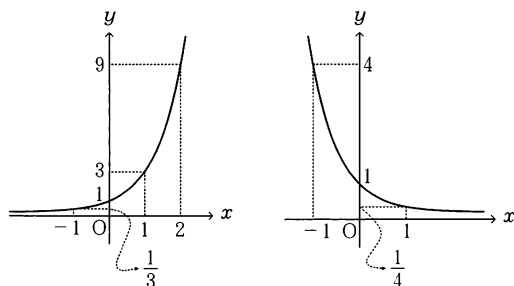
【解説】

- (1) $64^{\frac{1}{4}} = (2^6)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2} > 2 > \frac{3}{2}$
 (2) $(6^{\frac{1}{3}})^6 = 36$
 $(5^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{1}{2}})^6 = 5^3 \div 2^3 = 15.625$
 (3) $(12^{\frac{1}{4}})^4 = 12$
 $(3^2 \times 5^{-1})^4 = \frac{81^2}{25^2} = 10.4976$
 (4) $(10^{\frac{3}{4}})^{12} = 10^9$
 $(2^{\frac{8}{3}})^{12} = 2^{32} = (1024)^3 \times 4$

31 指数関数とそのグラフ (P 160 ~ P 163)

◇確認問題 (P 160 ~ P 161)

- 1 $y = 3^x$ のグラフ $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ のグラフ



2(1) $x = 0$ (2) $x = \frac{3}{2}$ (3) $x = \frac{3}{2}$

【解説】

(1) $2^4 = 16$ ゆえに $x + 4 = 4$
 (2) $3^2 = 9$ ゆえに $2x - 1 = 2$
 (3) $5^{-2} = \frac{1}{25}$ ゆえに $-2x + 1 = -2$

3(1)① $x > \frac{3}{4}$ ② $x \leq \frac{2}{3}$ ③ $x \leq 2$

(2)① $\sqrt[4]{125}$ ② $\frac{1}{\sqrt[3]{16}}$ ③ $(\sqrt[4]{3})^7$

【解説】

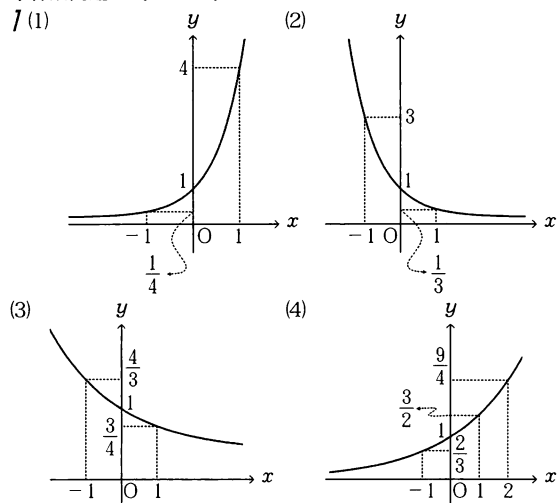
(1)① $3^2 = 9$ より, $3^{4x-1} > 9 \iff 4x - 1 > 2$
 ② $4^4 = 256$ より, $4^{3x-2} \leq 256 \iff 3x - 2 \leq 4$
 ③ 与式 $\iff -3x + 2 \geq -4$
 (2)① $\sqrt[3]{25} = 5^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[4]{125} = 5^{\frac{3}{4}}$
 ② $\frac{1}{\sqrt[3]{16}} = 2^{-\frac{4}{3}}$
 ③ $\sqrt[4]{27} = 3^{\frac{3}{4}}$, $(\sqrt[4]{3})^7 = 3^{\frac{7}{4}}$

4(1) $x = 0, 1$ (2) $x \leq 0, 1 \leq x$ (3) $x = 2, 3$
 (4) $2 < x < 3$

【解説】

(1) $3^x = t$ とおくと, 与式は $t^2 - 4t + 3 = 0$
 これを解くと, $t = 1, 3$ となる。
 (2) 同様におくと, $(t-1)(t-3) \geq 0$ となり,
 $t \geq 3, t \leq 1$ が得られる。
 (3) $2^x = t$ とおくと, 与式は $t^2 - 12t + 32 = 0$
 これを解くと, $t = 4, 8$ となる。
 (4) 同様におくと, $(t-4)(t-8) < 0$ となり,
 $4 < t < 8$ が得られる。

◇練習問題A (P 162)



2(1) $x = \frac{5}{3}$ (2) $x = -2$ (3) $x = 0$
 (4) $x = -4$ (5) $x = -2$ (6) $x = -9$

【解説】

(1) $2^6 = 64$ より $3x + 1 = 6$
 (2) 与式より $2^{2x+3} = 2^{-1}$ ゆえに $2x + 3 = -1$
 (3) $3^3 = 27$ より $-x + 3 = 3$
 (4) 与式より $\frac{x}{2} + 1 = -1$
 (5) 与式より $-\frac{x}{2} - 1 = 0$
 (6) 与式より $\frac{x}{3} + 1 = -2$

3(1) $x > -4$ (2) $x \leq -\frac{3}{2}$ (3) $x \geq -8$

(4) $x \geq -3$ (5) $x < \frac{3}{2}$ (6) $x \leq -2$

【解説】

(1) $2^{-2} = \frac{1}{4}$ より 与式 $\iff x + 2 > -2$
 (2) $3^{-2} = \frac{1}{9}$ より 与式 $\iff 2x + 1 \leq -2$
 (3) $3^3 = 27$ より 与式 $\iff -\frac{x}{2} - 1 \leq 3$
 (4) 与式 $\iff 2^{-x} \leq 2^3 \iff -x \leq 3$
 (5) 与式 $\iff 3^{-2x+1} > 3^{-2} \iff -2x + 1 > -2$
 (6) 与式 $\iff 2^{-\frac{x}{4}-1} \geq 2^{-\frac{1}{2}} \iff -\frac{x}{4} - 1 \geq -\frac{1}{2}$

4(1) $\sqrt[3]{4}$ (2) $\sqrt[3]{27}$ (3) $6^{-\frac{1}{2}}$ (4) $25\sqrt{5}$

【解説】

(1) $\sqrt[3]{4} = 2^{\frac{2}{3}} > 2^{\frac{1}{3}}$
 (2) $\sqrt[3]{27} = 3^{\frac{3}{3}}, \sqrt[3]{9} = 3^{\frac{2}{3}}$
 (3) $\frac{1}{\sqrt[3]{36}} = 6^{-\frac{2}{3}}$
 (4) $25\sqrt{5} = 5^{\frac{5}{2}}, (\sqrt[3]{5})^7 = 5^{\frac{7}{3}}$

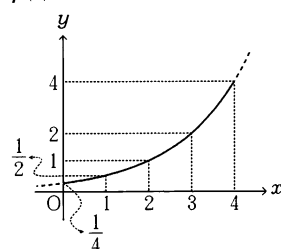
5(1) $x = 0, -1$ (2) $-1 < x < 0$ (3) $x = -2, -1$
 (4) $x \leq -2, -1 \leq x$ (5) $x = \frac{1}{2}$ (6) $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

【解説】

(1) $2^x = t$ とおくと, 与式は $2t^2 - 3t + 1 = 0$ となる。
 これを解くと $t = 1, \frac{1}{2}$ を得る。
 (2) $2^x = t$ とおくと, 与式は $2t^2 - 3t + 1 < 0$ となる。
 これを解くと $\frac{1}{2} < t < 1$ を得る。
 (3) $3^x = t$ とおくと, 与式は $27t^2 - 12t + 1 = 0$ となる。
 これを解くと $t = \frac{1}{9}, \frac{1}{3}$ を得る。
 (4) $3^x = t$ とおくと, 与式は $27t^2 - 12t + 1 \geq 0$ となる。
 これを解くと $t \leq \frac{1}{9}, \frac{1}{3} \leq t$ を得る。
 (5) $2^x = t$ とおくと, 与式は $t^2 - 2\sqrt{2}t + 2 = 0$ となる。
 これを解くと $t = \sqrt{2}$ を得る。
 (6) $2^x = t$ とおくと, 与式は $t^2 - (2 + \sqrt{2})t + 2\sqrt{2} \leq 0$
 となる。
 これを解くと $\sqrt{2} \leq t \leq 2$ を得る。

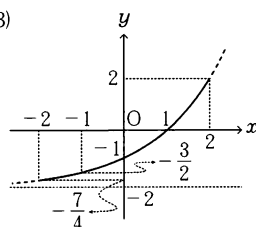
◇練習問題B (P 163)

1 (1)



$y = 2^x$ を x 軸の正方向に
2 だけ平行移動

(3)



$y = 2^x$ を y 軸の負方向に
2 だけ平行移動

2 (1) $x = -\frac{1}{3}$

(2) $x = 3$

(3) $x = \frac{9}{4}$

(4) $x = 1$

(5) $x = -\frac{1}{4}$

【解説】

(1) 与式 $\Leftrightarrow 2^{\frac{1+x}{2}} = 2^{2x+1}$
 $\Leftrightarrow \frac{1+x}{2} = 2x+1$

(2) 与式 $\Leftrightarrow 3^{-x+3} = 3^{\frac{2}{3}x-2}$
 $\Leftrightarrow -x+3 = \frac{2}{3}x-2$

(3) 与式 $\Leftrightarrow 2^{2\sqrt{x}} = 2^3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 3$

(4) 与式 $\Leftrightarrow 5^{\frac{x+1}{2}} = 5^1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = 1$

(5) 与式 $\Leftrightarrow 3^{-3x+1} = 3^{2+x} \Leftrightarrow -3x+1 = 2+x$

3 (1) $x \leq \frac{4}{3}$

(2) $-4 \leq x \leq 4$

(3) $x \leq \frac{7}{4}$

(4) $x \leq 0$

(5) $x \geq \frac{9}{10}$

【解説】

(1) 与式 $\Leftrightarrow 2^{\frac{3}{4}x+1} \leq 2^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x+1 \leq 2$

(2) 与式 $\Leftrightarrow 2^{-1} \leq 2^{\frac{x}{2}+1} \leq 2^3$
 $\Leftrightarrow -1 \leq \frac{x}{2}+1 \leq 3$

(3) 与式 $\Leftrightarrow 2^{-\frac{2x-1}{5}} \geq 2^{-\frac{1}{2}}$
 $\Leftrightarrow -\frac{2x-1}{5} \geq -\frac{1}{2}$

(4) 与式 $\Leftrightarrow 3^{-3x+1} \geq 3^{x+1} \Leftrightarrow -3x+1 \geq x+1$

(5) 与式 $\Leftrightarrow 2^{-6x-1} \leq 2^{4x-10}$
 $\Leftrightarrow -6x-1 \leq 4x-10$

4 (1) $x = 1, -1$

(2) $x = -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$

【解説】

(1) $5^x = t$ とおくと、与式は $5t^2 - 26t + 5 = 0$

これを解くと $t = 5, \frac{1}{5}$ を得る。

(2) $2^x = t$ とおくと、与式は $16t^2 - 6\sqrt{2}t + 1 = 0$

これを解くと $t = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{4\sqrt{2}}$ を得る。

5 (1) $x \neq 0$

(2) $-2 \leq x \leq -1$

【解説】

(1) 与式 $\Leftrightarrow 2^x - 1 \neq 0$

(2) $2^x = t$ とおけば与式は、 $2t^2 + 1 \leq -6(t^2 - t)$ となり、
これを整理すると $8t^2 - 6t + 1 \leq 0$

これを解いて $\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}$ が得られる。

6 (1) $\sqrt[3]{128}, \sqrt[3]{16}, \sqrt[3]{4}$ (2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{6}}, 1, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{7}}$

(3) $\frac{1}{\sqrt[3]{25}}, \frac{\sqrt[3]{25}}{5}, \frac{1}{\sqrt[4]{125}}$

【解説】

(1) $\sqrt[3]{16} = 2^{\frac{4}{3}}, \sqrt[3]{4} = 2^{\frac{2}{3}}, \sqrt[3]{128} = 2^{\frac{7}{3}}$
 $\frac{2}{3} < \frac{4}{3} < \frac{7}{3}$

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{6}} > 1, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{7}} = 2^{-\frac{1}{7}} < 1$

(3) $\frac{1}{\sqrt[4]{125}} = 5^{-\frac{3}{4}}, \frac{\sqrt[3]{25}}{5} = 5^{\frac{2}{3}-1} = 5^{-\frac{1}{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{25}} = 5^{-\frac{2}{3}}$
 $-\frac{3}{4} < -\frac{5}{7} < -\frac{2}{3}$

32 対数とその性質 (P 164 ~ P 167)

◇確認問題 (P 164 ~ P 165)

1 (1) $\log_4 64 = 3$

(2) $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$

(3) $\log_2 0.5 = -1$

(4) $\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

2 (1) 3

(2) $\frac{1}{2}$

(3) -2

(4) 2

【解説】

(1) $2^3 = 8$

(2) $\sqrt{9} = 3$

(3) $\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4$

(4) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

3 (1) 2

(2) 5

(3) $-\frac{3}{2}$

(4) $\frac{5}{4}$

【解説】

(1) 与式 $= \log_{12} 144 = \log_{12} 12^2$

(2) 与式 $= \log_3 \frac{81}{1} = \log_3 3^5$

(3) 与式 $= -\log_3 \sqrt{27} = -\frac{1}{2} \log_3 27 = -\frac{1}{2} \log_3 3^3$