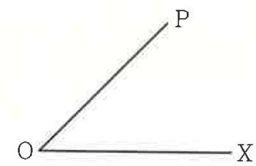
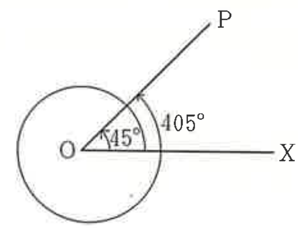
23　一般角(1)と弧度法

ポイント1　“回転の向き”と“一般角”の考え方



原点 O と半直線 OX を固定する．別に半直線 OP を考え，点 O を中心にして自由に回転するものとする．OP が OX の位置から回転を始めたとして，**正の向き（反時計回り）に測った角を＋，負の向き（時計回り）に測った角を－**として，回った角度のトータルを∠XOP の角度と考えることにする．

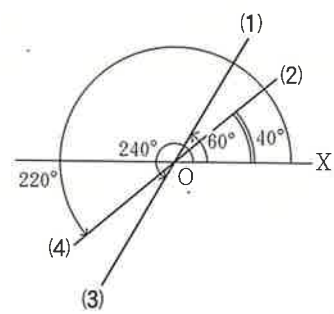


OP が OX の位置から回り始めてから 1 回転するまでは，実際に図形に現れる角度と∠XOP とは一致している．OP がちょうど 1 回転すると OX に重なり，さらに回転を続けると∠XOP は 360° をこえて大きくなる．たとえば右の図で，OP が正の向き（反時計回り）に 45° 回ったときも，1 回転してさらに 45° 進んだとき（初めから計算して 405° 回ったとき）も，OP の位置は同じところにきている．このように角度の考え方を，従来の $0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ から，正方向へも負方向へも自由に拡げた考え方を**一般角**の考え方という．一般に α をある角度とするとき，OP が $\boldsymbol{\theta = \alpha + 360^\circ \times n}$ **（n は整数）**の角度だけ回転すると，OP の見かけの位置はすべて同じ位置にくる．なお，**OX** のことを**始線**，**OP** のことを**動径**という．

例題1　次の角を図示せよ．

(1)　60°　　(2)　400°　　(3)　-120°　　(4)　-500°

（解答） 答は右図



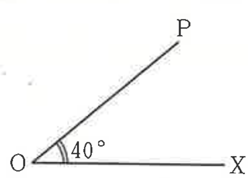
(2)　$400^\circ = 360^\circ + 40^\circ$

(3)　$-120^\circ = 240^\circ + 360^\circ \times (-1)$

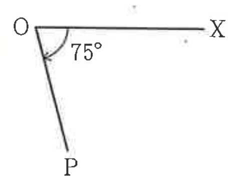
(4)　$-500^\circ = 220^\circ + 360^\circ \times (-2)$

例題2　次の動径ＯＰの表す一般角を求めよ．

(1)



(2)



（解答） (1)　$40^\circ + 360^\circ \times n$（$n$ は整数）

(2)　$-75^\circ + 360^\circ \times n$（あるいは，$285^\circ + 360^\circ \times n$）（$n$ は整数）

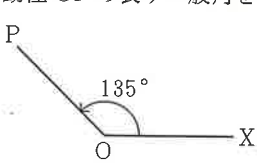
確認問題 1　次の問に答えよ．

(1)　次の角を図示せよ．

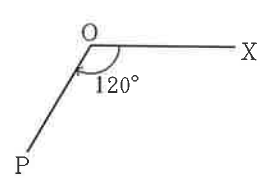
□①　-30°　　□②　390°　　□③　780°　　□④　-450°

(2)　次の動径 OP の表す一般角を求めよ．

□①

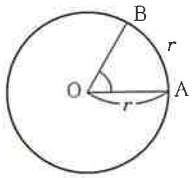


□②



ポイント2　弧度法

点 O を中心とする半径 r の円を考える．円周上の 2 点 AB の弧の長さが r のとき $\angle \mathrm{AOB}$ を 1 ラジアン（1 弧度）という．

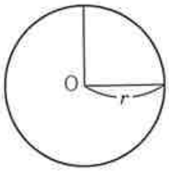


例題　次の角をラジアンを使って表せ．

(1)　90°　　　　(2)　180°

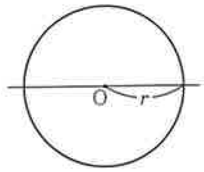
(解答) (1)　90° に対する弧の長さは $2\pi r \times \dfrac{90}{360} = \dfrac{\pi}{2} r$

よって $\dfrac{\pi}{2}$ ラジアン



(2)　180° に対する弧の長さは $2\pi r \times \dfrac{180}{360} = \pi r$

よって π ラジアン



確認問題 2　次の問に答えよ．

□(1)　次の表の空欄に適する角を求めよ．

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
弧度									

(2)　次の角を，度は弧度に，弧度は度に書き直せ．

□①　70°　　□②　130°　　□③　$\dfrac{\pi}{5}$　　□④　$\dfrac{6}{7}\pi$

□(3)　次の表の空欄に適する値を求めよ．

弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin\theta$									
$\cos\theta$									
$\tan\theta$									

ポイント3　扇形の弧の長さと面積

扇形の弧の長さ（l）と面積（S）は，ともに中心角（θ）に比例する．

$l : r = \theta : 1$ より　$l = r\theta$，　$S : \pi r^2 = \theta : 2\pi$，　$S = \dfrac{\pi r^2 \theta}{2\pi} = \dfrac{1}{2} r^2 \theta = \dfrac{1}{2} l r$

例題　半径 4，中心角 $\dfrac{\pi}{3}$ の扇形の弧の長さと面積を求めよ．

(解答)　弧の長さを l とする．$l = 4 \times \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4}{3}\pi$

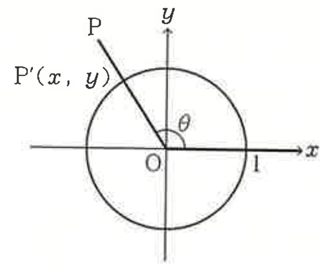
面積を S とする．$S = \dfrac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{8}{3}\pi$　　$\therefore$　弧の長さ $\dfrac{4}{3}\pi$，面積 $\dfrac{8}{3}\pi$

確認問題 3　次のような扇形の弧の長さと面積を求めよ．

□(1)　半径 6，中心角 $\dfrac{\pi}{3}$　　　□(2)　半径 12，中心角 $\dfrac{3}{4}\pi$

ポイント4 一般角の三角関数

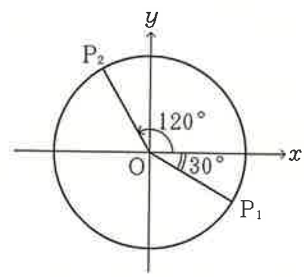
θ は一般角とする．O を原点，始線 OX を x 軸の正方向にとる．**半径が 1 の円**（これを**単位円**という）を考え，動径 OP とこの円の交点 **P′ の座標を $(x,\ y)$** とするとき，



$$\sin\theta = y,\quad \cos\theta = x,\quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

によって，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を定める．これらを一般角の正弦，余弦，正接という．

なお，$x = 0$ のとき，つまり，$\theta = 90° + 180° \times n$（$n$ は整数）のとき，**$\tan\theta$ の値は定義しない．**



例題 θ が次の値のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(1) $-30°$　　(2) $480°$

(解答) (1) x 軸の正方向から長さ 1 の動径が時計回りに $30°$ 回ると，P_1 の位置にくる．P_1 の座標は $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ である．

$$\therefore\ \sin(-30°) = -\frac{1}{2},\quad \cos(-30°) = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \tan(-30°) = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(2) $480° = 120° + 360° \times 1$　よって

$$\sin 480° = \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos 480° = \cos 120° = -\frac{1}{2},\quad \tan 480° = \tan 120° = -\sqrt{3}$$

確認問題 4 θ が次の値のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

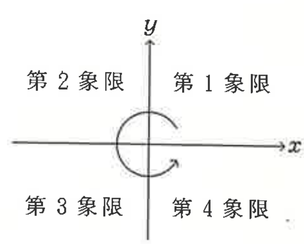
□(1) $-120°$　　□(2) $765°$　　□(3) $-540°$

ポイント5 象限と三角関数の符号

数学 I で学んだように平面は 4 つの象限に分けられる．

注意 座標軸はどの象限にも属さないと定める．三角関数の値について，右の表の性質が重要である．

θ の属する象限	1	2	3	4
$\sin\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$	+	−	+	−



例題 次の問に答えよ．

(1) $\theta = -690°$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の符号を答えよ．

(2) $\sin\theta > 0$，$\cos\theta < 0$ のとき，θ は第何象限に属するか答えよ．

(解答) (1) $-690° = 30° + 360° \times (-2)$　よって，$-690°$ は第 1 象限に属する．

上の表より，$\sin(-690°) > 0$，$\cos(-690°) > 0$，$\tan(-690°) > 0$

(2) 上の表より，θ は第 2 象限に属する．

確認問題 5 θ が次の値のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の符号を答えよ．

□(1) $\theta = -880°$　　□(2) $\theta = 1000°$

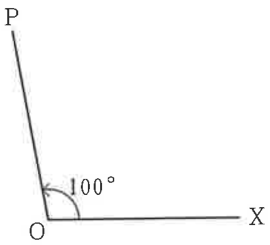
練成問題 A

1 次の角を図示せよ. (⇨ ポイント 1)

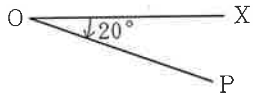
□(1) 210°　　□(2) 750°　　□(3) −280°　　□(4) −1000°

2 次の動径 OP の表す一般角を求めよ. (⇨ ポイント 1)

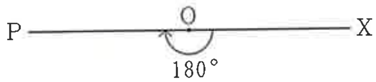
□(1)



□(2)



□(3)



3□ 次の表の空欄に適する角を求めよ. (⇨ ポイント 2)

度	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
弧度									

4 次の角を, 度は弧度に, 弧度は度に書き直せ. (⇨ ポイント 2)

□(1) 320°　　□(2) 75°　　□(3) $\frac{11}{8}\pi$　　□(4) $\frac{4}{9}\pi$

5□ 次の表の空欄に適する値を求めよ. (⇨ ポイント 2)

弧度	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin\theta$									
$\cos\theta$									
$\tan\theta$									

6　次のような扇形の弧の長さと面積を求めよ.　(⇨ ポイント３)

□(1)　半径 3, 中心角 $\frac{\pi}{6}$　　□(2)　半径 8, 中心角 $\frac{2}{3}\pi$

7　θ が次の値のとき, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の値を求めよ.　(⇨ ポイント４)

□(1)　840°　　□(2)　-390°

□(3)　-675°　　□(4)　-510°

8　θ が次の値のとき, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の符号を答えよ.　(⇨ ポイント５)

□(1)　144°　　□(2)　-72°

□(3)　250°　　□(4)　-410°

9　$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ が次の符号をもつとき, θ は第何象限に属する角か. 象限の番号を答えよ.　(⇨ ポイント５)

□(1)　$\sin\theta > 0$, $\cos\theta < 0$　　□(2)　$\sin\theta < 0$, $\tan\theta > 0$

□(3)　$\tan\theta > 0$　　□(4)　$\cos\theta > 0$, $\tan\theta > 0$

練成問題　B

1　θ が次の範囲にあるとき，次の三角関数の符号を調べよ．

□(1)　θ が第 4 象限のとき，$\sin\theta\cos\theta$

□(2)　θ が第 3 象限のとき，$\sin\theta\tan\theta$

2　次のとき，θ は第何象限にあるか．象限の番号を答えよ．（答えは 1 つとは限らない）

□(1)　$\sin\theta$ が正のとき

□(2)　$\tan\theta$ が負のとき

□(3)　$\sin\theta\cos\theta$ が正のとき

□(4)　$\tan\theta\sin\theta$ が負のとき

3　次の値を求めよ．

□(1)　$\tan\left(-\frac{11}{4}\pi\right)$

□(2)　$\cos\left(-\frac{8}{3}\pi\right)$

□(3)　$\sin\frac{13}{4}\pi$

□(4)　$\tan\frac{17}{6}\pi$

□(5)　$\cos 3\pi$

□(6)　$\sin\left(-\frac{13}{3}\pi\right)$

4　次の条件をみたす θ を，$\theta = \alpha + 2\pi \times n$（$n$ は整数，$0 \leqq \alpha < 2\pi$）の形で求めよ．

□(1)　$\sin\theta = -\frac{1}{2}$

□(2)　$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

□(3)　$\tan\theta = -\sqrt{3}$

□(4)　$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

24　三角関数の相互関係と一般角(2)

ポイント1　三角関数の相互関係

三角関数の定義より，次の公式が得られる．

1)　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

2)　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

例題1　$\sin\theta = \dfrac{3}{4}$，$90^\circ \leqq \theta < 180^\circ$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(解答) まず θ の範囲より，$\cos\theta < 0$，$\tan\theta < 0$ である．よって公式 1) より，

$$\cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta} = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{7}}{4},\quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}} = -\frac{3}{\sqrt{7}} = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$$

例題2　次の式を簡単にせよ．

(1)　$(1+\sin\theta)^2 + (1+\cos\theta)^2$　　　(2)　$\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta}$

(解答) (1)　与式 $= 1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta = 2(\sin\theta + \cos\theta) + 3$

(2)　与式 $= \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

例題3　$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　　(2)　$\sin^3\theta + \cos^3\theta$

(解答) (1)　まず与式を 2 乗する．

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{9}$$

$$\therefore\ \sin\theta\cos\theta = -\frac{4}{9}$$

(2)　$\sin^3\theta + \cos^3\theta = (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)$
$= (\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)$

ここにわかっている値を代入する．

$$\therefore\ \sin^3\theta + \cos^3\theta = \frac{1}{3} \times \left\{1 - \left(-\frac{4}{9}\right)\right\} = \frac{1}{3} \times \frac{13}{9} = \frac{13}{27}$$

確認問題 1　次の問に答えよ．

(1)　次の値を求めよ．

□①　$180^\circ \leqq \theta < 270^\circ$ とする．$\cos\theta = -\dfrac{1}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値

□②　$270^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ とする．$\tan\theta = -3$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値

(2)　次の式を簡単にせよ．

□①　$\tan^2\theta + 1$　　　□②　$(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\cos\theta - \sin\theta)^2$

(3)　$\sin\theta - \cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ のとき，次の式の値を求めよ．

□①　$\sin\theta\cos\theta$　　　□②　$\sin^3\theta - \cos^3\theta$

ポイント2　一般角 $(\theta+2\pi\times n)$ の三角関数

前節で学んだように，n が整数のとき，次の関係が成り立つ．

$$\sin(\theta+2\pi\times n)=\sin\theta,\quad \cos(\theta+2\pi\times n)=\cos\theta,\quad \tan(\theta+2\pi\times n)=\tan\theta$$

例題　次の値を求めよ．

(1)　$\sin\frac{9}{4}\pi$　　(2)　$\cos\frac{14}{3}\pi$　　(3)　$\tan\frac{19}{4}\pi$

(解答) 2π をこえている場合，2π の整数倍を引いて，$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲の θ に帰着させる．

(1)　$\sin\frac{9}{4}\pi=\sin\left(\frac{9}{4}\pi-2\pi\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2)　$\cos\frac{14}{3}\pi=\cos\left(\frac{14}{3}\pi-2\pi\times2\right)=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$

(3)　$\tan\frac{19}{4}\pi=\tan\left(\frac{19}{4}\pi-2\pi\times2\right)=\tan\frac{3}{4}\pi=\dfrac{\sin\frac{3}{4}\pi}{\cos\frac{3}{4}\pi}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$

確認問題 2　次の値を求めよ．

□(1)　$\sin\frac{11}{4}\pi$　　□(2)　$\cos\frac{17}{4}\pi$　　□(3)　$\tan\frac{29}{6}\pi$

ポイント3　$(-\theta)$ の三角関数

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta,\quad \cos(-\theta)=\cos\theta,\quad \tan(-\theta)=-\tan\theta$$

例題　次の値を求めよ．

(1)　$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$　　(2)　$\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$　　(3)　$\tan\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$

(解答) (1)　$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$

(3)　$\tan\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=-\tan\frac{3}{4}\pi=-(-1)=1$

確認問題 3　次の値を求めよ．

□(1)　$\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$　　□(2)　$\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$　　□(3)　$\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$

ポイント4　$(\theta+\pi)$ の三角関数

$$\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta,\quad \cos(\theta+\pi)=-\cos\theta,\quad \tan(\theta+\pi)=\tan\theta$$

例題　次の値を求めよ．

(1)　$\sin\frac{7}{4}\pi$　　(2)　$\cos\left(-\frac{5}{4}\pi\right)$　　(3)　$\tan\frac{4}{3}\pi$

(解答) (1)　$\sin\frac{7}{4}\pi=\sin\left(\frac{3}{4}\pi+\pi\right)=-\sin\frac{3}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2)　$\cos\left(-\frac{5}{4}\pi\right)=\cos\frac{5}{4}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3)　$\tan\frac{4}{3}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

確認問題 4　次の値を求めよ.

□(1)　$\cos\frac{4}{3}\pi$　　□(2)　$\sin\left(-\frac{5}{4}\pi\right)$

ポイント5　$\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$ の三角関数

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta,\ \cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta,\ \tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$$

例題　次の値を求めよ.

(1)　$\sin\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)$ を $\cos\theta$ の式に変形せよ.　(2)　$\cos\left(\theta-\frac{5}{2}\pi\right)$ を $\sin\theta$ の式に変形せよ.

(解答) (1)　$\sin\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)=\sin\left\{\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\pi\right\}=-\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\theta$

(2)　$\cos\left(\theta-\frac{5}{2}\pi\right)=\cos\left(\theta-\frac{5}{2}\pi+4\pi\right)=\cos\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)=\cos\left\{\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\pi\right\}=-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$

$=-(-\sin\theta)=\sin\theta$

確認問題 5　次の問に答えよ.

□(1)　$\tan\left(\theta+\frac{5}{2}\pi\right)$ を $\tan\theta$ の式に変形せよ.　□(2)　$\cos\left(\theta-\frac{3}{2}\pi\right)$ を $\sin\theta$ の式に変形せよ.

ポイント6　一般の角 θ に対する三角関数の値

$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ を求める場合，θ がどんな数であっても，ポイント 2～5 を用いることによりその値を $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$（$0°\leqq\alpha\leqq 90°$）の計算に帰着させることができる．この形にして，巻末の三角関数表を利用すると，一般の角 θ に対する三角関数の値をすべて求めることができる．

例題　巻末の三角関数表を用いて，次の値を求めよ.

(1)　$\sin 221°$　　(2)　$\cos(-190°)$　　(3)　$\tan 413°$

(解答) (1)　$\sin 221°=\sin(41°+180°)=-\sin 41°=-0.6561$

(2)　$\cos(-190°)=\cos 190°=\cos(10°+180°)=-\cos 10°=-0.9848$

(3)　$\tan 413°=\tan(53°+360°)=\tan 53°=1.3270$

確認問題 6　巻末の三角関数表を用いて，次の値を求めよ.

□(1)　$\sin 710°$　　□(2)　$\cos(-311°)$　　□(3)　$\tan(-256°)$

練成問題 A

1 $180^\circ < \theta < 270^\circ$ とする．次の値を求めよ． (⇨ ポイント１)

□(1) $\sin\theta = -\frac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値　□(2) $\cos\theta = -\frac{2}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値

□(3) $\tan\theta = 3$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値　□(4) $\sin\theta = -\frac{4}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値

2 $270^\circ < \theta < 360^\circ$ とする．次の値を求めよ． (⇨ ポイント１)

□(1) $\sin\theta = -\frac{1}{4}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値　□(2) $\cos\theta = \frac{3}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値

□(3) $\tan\theta = -\sqrt{2}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値　□(4) $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値

3 $-180^\circ < \theta < 0^\circ$ とする．次の値を求めよ．(答えは１つとは限らない) (⇨ ポイント１)

□(1) $\sin\theta = -\frac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値　□(2) $\cos\theta = \frac{2}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値

□(3) $\tan\theta = 4$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値　□(4) $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値

4 次の式を簡単にせよ． (⇨ ポイント１)

□(1) $\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$　□(2) $\tan^4\theta + 2\tan^2\theta + 1$

□(3) $(\sin\theta + \cos\theta + 1)(\sin\theta + \cos\theta - 1)$

5 $\sin\theta + \cos\theta = -\frac{1}{2}$ とするとき，次の式の値を求めよ． (⇨ ポイント１)

□(1) $\sin\theta\cos\theta$　□(2) $\sin^3\theta + \cos^3\theta$　□(3) $\sin^4\theta + \cos^4\theta$

6 $\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{2}$ とするとき，次の式の値を求めよ． (⇨ ポイント１)

□(1) $\sin\theta\cos\theta$　□(2) $\sin^3\theta - \cos^3\theta$　□(3) $\sin^4\theta + \cos^4\theta$

7 次の値を求めよ． (⇨ ポイント2)

□(1) $\sin\frac{13}{3}\pi$ □(2) $\cos\frac{8}{3}\pi$ □(3) $\cos\frac{11}{4}\pi$ □(4) $\tan\frac{17}{6}\pi$

8 次の値を求めよ． (⇨ ポイント3)

□(1) $\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$ □(2) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

□(3) $\tan\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$ □(4) $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

9 次の値を求めよ． (⇨ ポイント4)

□(1) $\sin\frac{5}{4}\pi$ □(2) $\sin\left(-\frac{15}{4}\pi\right)$

□(3) $\cos\frac{11}{6}\pi$ □(4) $\tan\left(-\frac{35}{6}\pi\right)$

10 次の問に答えよ． (⇨ ポイント5)

□(1) $\sin\left(\theta+\frac{5}{2}\pi\right)$ を $\cos\theta$ の式に変形せよ．

□(2) $\tan\left(\theta-\frac{3}{2}\pi\right)$ を $\tan\theta$ の式に変形せよ．

□(3) $\cos\left(\theta-\frac{7}{2}\pi\right)$ を $\sin\theta$ の式に変形せよ．

□(4) $\tan\left(\theta+\frac{7}{2}\pi\right)$ を $\tan\theta$ の式に変形せよ．

11 巻末の三角関数表を用いて，次の値を求めよ． (⇨ ポイント6)

□(1) $\sin275^\circ$ □(2) $\cos550^\circ$ □(3) $\tan410^\circ$ □(4) $\tan530^\circ$

12 巻末の三角関数表を用いて，次の値を求めよ． (⇨ ポイント6)

□(1) $\sin(-250^\circ)$ □(2) $\sin(-500^\circ)$

□(3) $\cos(-410^\circ)$ □(4) $\tan(-625^\circ)$

練成問題　B

1　**θは第３象限の角とする．次の値を求めよ．**

□(1)　$\sin\theta = -\dfrac{3}{4}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値　□(2)　$\sin\theta = \cos\theta$ のとき，$\sin\theta$ の値

□(3)　$\sin\theta = 2\cos\theta$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ の値

□(4)　$\sin\theta = -1 + \alpha$，$\cos\theta = -1 + 2\alpha$ のとき，α の値，および $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値

2　**$-90^\circ \leqq \theta < 0^\circ$ とする．次の値を求めよ．**

□(1)　$\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \dfrac{1}{3}$ のとき，θ の値　□(2)　$\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} = 4$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値

□(3)　$\sin\theta + \cos\theta = 0$ のとき，θ の値　□(4)　$\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin^2\theta$，$\cos^2\theta$ の値

3□　**$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ のときθの値を，$\theta = \alpha + 360^\circ + n$（$n$ は整数），$0^\circ \leqq \alpha < 360^\circ$ の形で求めよ．**

4　**次の問に答えよ．**

□(1)　$\sin\dfrac{65}{18}\pi$ を $\cos\theta$（ただし $0 \leqq \theta < \pi$）の式に変形せよ．

□(2)　$\cos\left(-\dfrac{25}{9}\pi\right)$ を $\sin\theta$ $\left(\text{ただし} -\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の式に変形せよ．

□(3)　$\sin\left(-\dfrac{19}{9}\pi\right)$ を $\cos\theta$（ただし $0 \leqq \theta < \pi$）の式に変形せよ．

□(4)　$\cos\dfrac{34}{9}\pi$ を $\sin\theta$ $\left(\text{ただし} -\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の式に変形せよ．

5　**巻末の三角関数表を用いて，次の条件をみたすθに最も近い整数の値を求めよ．答えは指示された範囲から選ぶこと．**

□(1)　$\sin\theta = 0.31$（$90^\circ \leqq \theta < 180^\circ$）　□(2)　$\sin\theta = -0.47$（$180^\circ \leqq \theta < 270^\circ$）

□(3)　$\cos\theta = 0.72$（$180^\circ \leqq \theta < 360^\circ$）　□(4)　$\cos\theta = -0.63$（$180^\circ \leqq \theta < 360^\circ$）

□(5)　$\tan\theta = 2.6$（$180^\circ \leqq \theta < 360^\circ$）　□(6)　$\tan\theta = 2.9$（$-180^\circ \leqq \theta < 0^\circ$）

□(7)　$\cos\theta = 0.83$（$-180^\circ \leqq \theta < 0^\circ$）　□(8)　$\sin\theta = -0.94$（$-90^\circ \leqq \theta < 0^\circ$）

25　三角関数のグラフ

ポイント1　$y = \sin\theta$，$y = \cos\theta$ のグラフ

1)　関数 $f(x)$ が

　　$f(-x) = f(x)$ をみたすとき，$f(x)$ は**偶関数**

　　$f(-x) = -f(x)$ をみたすとき，$f(x)$ は**奇関数**

であるという．

偶関数のグラフは y 軸に関して線対称，奇関数のグラフは原点に関して点対称になる．$\sin\theta$ は $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ なので奇関数，$\cos\theta$ は $\cos(-\theta) = \cos\theta$ なので偶関数である．

2)　関数 $f(x)$ と別の定数 p があって（$p \neq 0$），すべての x に対してつねに

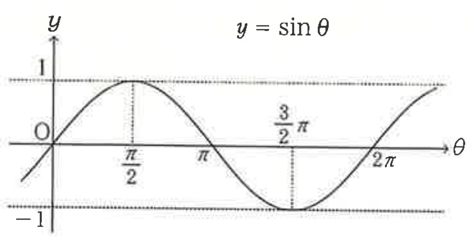
　　$f(x+p) = f(x)$

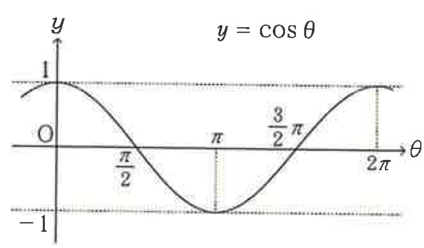
が成り立つとき，$f(x)$ は**周期関数**であるといい，p を $f(x)$ の**周期**という．

　　$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$，$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$，$\tan(\theta + 2\pi) = \tan\theta$

なので，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ はいずれも周期関数であり，2π は sin，cos，tan のいずれの場合にも周期になっている．

3)　$y = \sin\theta$，$y = \cos\theta$ のグラフの概形は次のようになる．





この 2 つの関数の性質として，次の 3 つは重要である．

(1)　2π を周期とする周期関数である

(2)　関数のとる値の範囲は，$-1 \leqq y \leqq 1$ である

(3)　$y = \sin\theta$ は奇関数（グラフが原点に関して点対称），$y = \cos\theta$ は偶関数（グラフが y 軸に関して線対称）である

注意　$f(x)$ が p を周期とする周期関数なら，$2p$，$3p$ などはすべて周期の条件をみたしている．ただし，一般に“関数の周期”という場合，周期の条件をみたすものの中で最小の正数を指すことになっている．したがって，$y = \sin\theta$ が 2π を周期とする周期関数という場合，2π が周期の条件をみたす正数の中で最小ということも意味している．

4)　上の 2 つのグラフを基本として，一般に

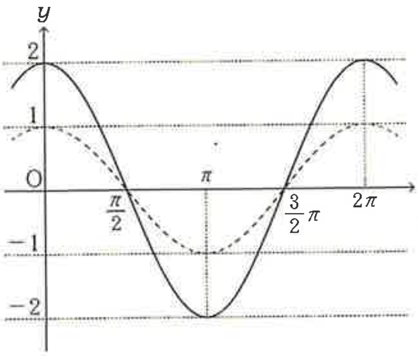
　　$y = a\sin(\theta + \alpha)$，$y = b\cos(\theta + \alpha)$（$a$，$b$ は定数，α は定まった角）

のグラフを描くことができる．

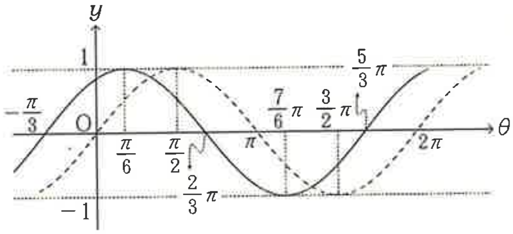
例題　次の関数のグラフの概形を描け．

(1)　$y = 2\cos\theta$　　(2)　$y = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$　　(3)　$y = 2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$

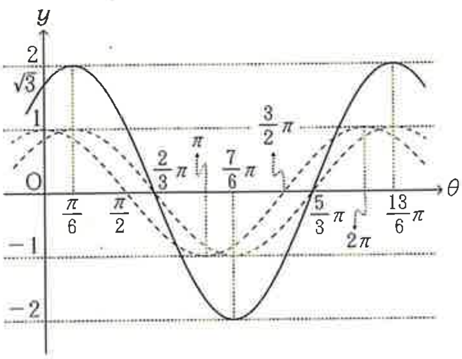
(解答) (1) $y = \cos\theta$ のグラフを y 軸方向に 2 倍したもの．



(2) $y = \sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動したもの．



(3)



(3)のグラフを描くには，

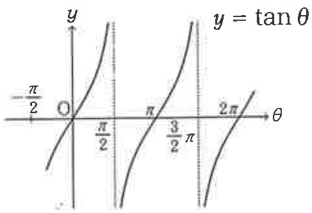
$$\begin{tikzcd}
y=\cos\theta \arrow[r, "\text{(2)のやり方}"'] \arrow[d, "\text{(1)のやり方}"'] & y=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right) \arrow[d, "\text{(1)のやり方}"] \\
y=2\cos\theta \arrow[r, "\text{(2)のやり方}"'] & y=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)
\end{tikzcd}$$

いずれの方法でもよいが，ステップを踏んでグラフを作るとよい．

確認問題 1　次の関数のグラフの概形を描け．

□(1) $y = \sqrt{3}\sin\theta$　　□(2) $y = \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$　　□(3) $y = \sqrt{3}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$

ポイント2 $y = \tan\theta$ のグラフ



$y = \tan\theta$ のグラフは右のようになる．主な性質として，

(1) π を周期とする周期関数である

(2) 関数のとる値の範囲は－無限大から＋無限大までである

(3) 奇関数である（原点 O に関して点対称）

さらに $y = \tan\theta$ のグラフは，n を整数とするとき，

θ が大きくなりながら $\dfrac{\pi}{2} + \pi \times n$ に近づくとき，グラフは直線 $\theta = \dfrac{\pi}{2} + \pi \times n$ に限りなく近づく

θ が小さくなりながら $\dfrac{\pi}{2} + \pi \times n$ に近づくとき，グラフは直線 $\theta = \dfrac{\pi}{2} + \pi \times n$ に限りなく近づく

という性質をもっている．このように，ある曲線のグラフが一定の直線に限りなく近づいて行くとき，この直線のことをそのグラフの**漸近線**と呼ぶ．したがって，

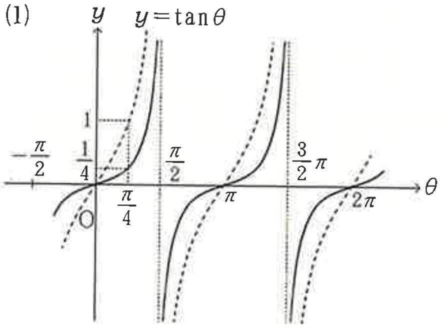
(4) 直線 $\theta = \dfrac{\pi}{2} + \pi \times n$（$n$ は整数）は $y = \tan\theta$ の漸近線である

(5) $y = \tan\theta$ のグラフを基本に $y = a\tan(\theta + \alpha)$（$a$ は定数，α は定まった角）のグラフを描くことができる

例題 次の関数のグラフの概形を描け.

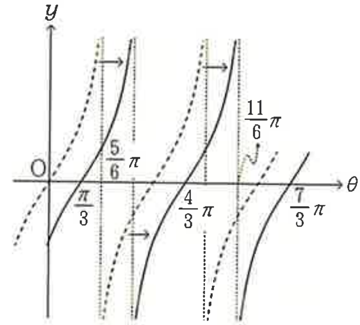
(1) $y=\dfrac{1}{4}\tan\theta$　　(2) $y=\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$

(解答) (1)



$y=\tan\theta$ のグラフを，y軸方向に $\dfrac{1}{4}$ 倍にしたもの．漸近線は同じ．

(2)



$y=\tan\theta$ のグラフを，θ軸の正方向に $\dfrac{\pi}{3}$ 平行移動したもの．漸近線は次のようにずれる．

$\theta=\dfrac{5}{6}\pi\ \left(=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\theta=\dfrac{11}{6}\pi\ \left(=\dfrac{3}{2}\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)$

⋮

確認問題 2 次の関数のグラフの概形を描け.

□(1) $y=\dfrac{1}{3}\tan\theta$　　□(2) $y=-\tan\theta$　　□(3) $y=\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

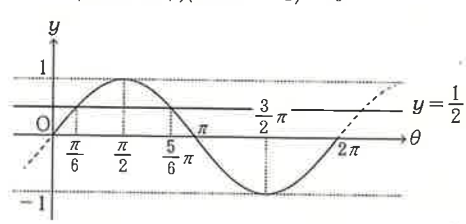
ポイント3 グラフを利用した方程式の解法

例題 $0\leqq\theta<2\pi$ とする．次の方程式をみたす θ の値を求めよ.

(1) $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$　　(2) $(\tan\theta+1)(\tan\theta-1)=0$

(解答) (1) $y=\sin\theta$ のグラフと直線 $y=\dfrac{1}{2}$ との交点が，求める θ の値である．右の図より $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で

$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$



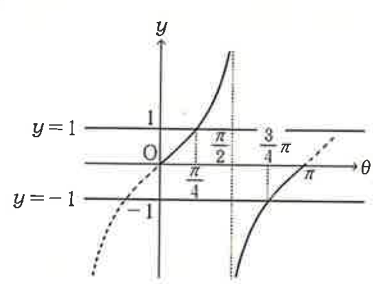
(2) $\tan\theta=1$ と $\tan\theta=-1$ を解けばよい．

(1)と同じく，$y=\tan\theta$ のグラフと直線 $y=1,\ -1$ の交点を見つける．右図より，$0\leqq\theta<\pi$ の範囲で

$\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$ が解である．

$\tan\theta$ の周期性より，

$\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$



確認問題 3 $0\leqq\theta<2\pi$ とする．次の方程式をみたす θ の値を求めよ.

□(1) $2\cos\theta+1=0$　　□(2) $\left(\sqrt{3}\tan\theta-1\right)\left(\sqrt{3}\tan\theta+1\right)=0$

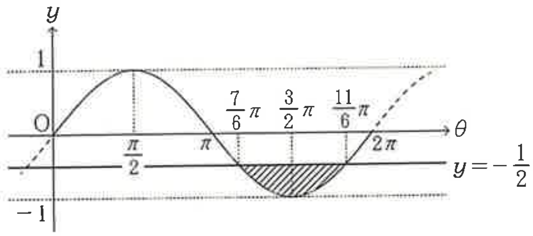
ポイント4　グラフを利用した不等式の解法

例題　次の不等式をみたす θ の値の範囲を求めよ．

(1)　$\sin\theta < -\frac{1}{2}$　$(0 \leqq \theta < 2\pi)$　　　(2)　$\tan\theta \leqq \sqrt{3}$　$(0 \leqq \theta < \pi)$

(解答) (1)　$y = \sin\theta$ のグラフが直線 $y = -\frac{1}{2}$ の下に出ている部分が，求める θ の範囲である．

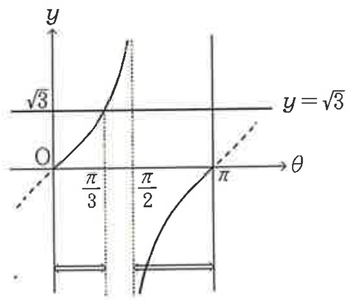
$\therefore\ \frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{11}{6}\pi$



(2)　$y = \tan\theta$ のグラフと，直線 $y = \sqrt{3}$ を図に描いてみる．$y = \tan\theta$ のグラフが $y = \sqrt{3}$ の下に出ている部分が，求める θ の範囲である．

$\therefore\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

注意　方程式や不等式を解く場合，$\theta = \frac{\pi}{2}$ などに対して $\tan\theta$ の値は定義されないことに注意する．



確認問題 4　次の不等式をみたす θ の値の範囲を求めよ．

□(1)　$\cos\theta \geqq \frac{\sqrt{2}}{2}$　$(0 \leqq \theta < 2\pi)$　　　□(2)　$-1 \leqq \tan\theta \leqq 1$　$(0 \leqq \theta < \pi)$

ポイント5　三角関数を含む式の最大値・最小値

例題　$0 \leqq \theta < 2\pi$ とするとき，$y = 4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1$ の最大値，最小値を求めよ．また，そのときの θ の値も求めよ．

(解答)　$x = \cos\theta$ とおくと，$-1 \leqq x \leqq 1$ である．

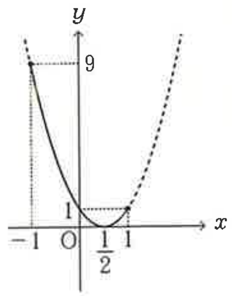
$$y = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

よって y は $x = \frac{1}{2}$ のとき最小値0をとり，$x = -1$ のとき最大値9をとる．

$x = \frac{1}{2}$ のとき　$\cos\theta = \frac{1}{2}$　　$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

$x = -1$ のとき　$\cos\theta = -1$　　$\therefore\ \theta = \pi$

答は最小値　0　$\left(\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi\right)$，最大値　9　$(\theta = \pi)$



確認問題 5　$0 \leqq \theta < 2\pi$ とするとき，次の関数の最大値，最小値を求めよ．また，そのときの θ の値も求めよ．

□(1)　$f(x) = 2\sin^2\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta + 1$　　　□(2)　$f(x) = \cos^2\theta - \cos\theta$

練成問題 A

1 次の関数のグラフの概形を描け．　(⇨ ポイント 1)

□(1) $y=-3\cos\theta$　□(2) $y=\sin\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)$

□(3) $y=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$　□(4) $y=\frac{1}{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$

2 次の関数のグラフの概形を描け．　(⇨ ポイント 2)

□(1) $y=\tan\left(\theta+\frac{5}{6}\pi\right)$　□(2) $y=2\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

3 $0\leqq\theta<2\pi$ とする．次の方程式をみたす θ の値を求めよ．　(⇨ ポイント 3)

□(1) $2\cos\theta=\sqrt{3}$　□(2) $\sqrt{3}\tan\theta=-1$

□(3) $2\sin\theta-\sqrt{2}=0$　□(4) $\cos\theta+1=0$

4 $0\leqq\theta<2\pi$ とする．次の不等式をみたす θ の範囲を求めよ．　(⇨ ポイント 4)

□(1) $2\cos\theta\geqq-1$　□(2) $2\sin\theta+\sqrt{3}<0$

□(3) $-1\leqq 2\sin\theta<\sqrt{3}$　□(4) $\tan\theta<-\sqrt{3}$

5 $0\leqq\theta<2\pi$ とする．次の問に答えよ．　(⇨ ポイント 5)

□(1) $y=\sin\theta+1$ の最大値，最小値を求めよ．また，そのときの θ の値も求めよ．

□(2) $y=\frac{1}{3}\cos\theta-1$ の最大値，最小値を求めよ．また，そのときの θ の値も求めよ．

6□ $0\leqq\theta<2\pi$ とするとき，$y=4\cos^2\theta-4\sqrt{3}\cos\theta+5$ の最大値，最小値を求めよ．また，そのときの θ の値も求めよ．　(⇨ ポイント 5)

練成問題　B

1　次の６つの関数を考える．次の問に答えよ．

(a)　$y = x$　　(b)　$y = x^2$　　(c)　$y = x^3$

(d)　$y = \dfrac{1}{x}$　　(e)　$y = \cos 2x$　　(f)　$y = \tan 2x$

□(1)　(a)〜(f)の中から偶関数をすべて選べ．

□(2)　(a)〜(f)の中から奇関数をすべて選べ．

□(3)　(a)〜(f)の中から周期関数をすべて選べ．

2　次の関数のグラフの概形を描け．また，その周期も答えよ．

□(1)　$y = \sin 2\theta$　　□(2)　$y = 2\cos\dfrac{\theta}{2}$　　□(3)　$y = \tan 2\theta$

□(4)　$y = 2\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$　　□(5)　$y = \sqrt{3}\cos\left(2\theta + \dfrac{2}{3}\pi\right)$　　□(6)　$y = 2\tan\left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)$

3　$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．θ に関する次の方程式を解け．

□(1)　$\sqrt{2}\sin 2\theta = -1$　　□(2)　$\tan 2\theta = 1$　　□(3)　$2\cos\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{3}$

□(4)　$2|\cos\theta| = 1$　　□(5)　$\sin^2\theta = \dfrac{3}{4}$　　□(6)　$\sin\theta = \cos\theta$

4　$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．θ に関する次の不等式を解け．

□(1)　$|\sin\theta| > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　□(2)　$(2\cos\theta - 1)(2\sin\theta - 1) > 0$

□(3)　$(\tan\theta + 1)(\tan\theta - 1) < 0$　　□(4)　$2\cos 2\theta > \sqrt{3}$

5　以下の範囲において，$y = \left(2\sin\theta + \sqrt{3}\right)\left(2\sin\theta - \sqrt{3}\right)$ の最大値，最小値を求めよ．また，そのときの θ の値も求めよ．

□(1)　$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{2}\pi$　　□(2)　$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$　　□(3)　$\dfrac{5}{4}\pi < \theta \leqq \dfrac{11}{6}\pi$