32　対数とその性質

ポイント1　対数の定義

$a>0$, $a\neq 1$ とする（底の条件）．前節のポイント2の3)の性質により，R を正の数とするとき，$a^r=R$ をみたす r がただ1つ存在する．この r のことを **a を底とする R の対数**といい $\log_a R$ と書く．R をこの対数の**真数**という．**真数**は**つねに正**である（**真数条件**）．

対数 r のみたす最も大切な式は，

$$\boldsymbol{r=\log_a R \iff a^r=R}$$

これによって，指数に関する式を対数の言葉に書き換えることができる．

$$a^0=1,\ a^1=a,\ a^{-1}=\frac{1}{a}$$

を対数で書き換えると，

$$\boldsymbol{\log_a 1=0,\ \log_a a=1,\ \log_a \frac{1}{a}=-1}$$

例題　**指数に関する次の関係式を $r=\log_a R$ の形に書き換えよ．**

(1)　$2^8=256$　　(2)　$81^{\frac{1}{4}}=3$　　(3)　$10^{-2}=0.01$

（解答）(1)　$\log_2 256=8$　　(2)　$\log_{81}3=\frac{1}{4}$　　(3)　$\log_{10}0.01=-2$

確認問題1　**指数に関する次の関係式を $r=\log_a R$ の形に書き換えよ．**

□(1)　$4^3=64$　　□(2)　$16^{\frac{1}{4}}=2$

□(3)　$2^{-1}=0.5$　　□(4)　$\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$

ポイント2　対数の値

指数への書き換えと指数の値の計算を用いて，対数の値を求めることができる．

例題　**次の対数の値を求めよ．**

(1)　$\log_3 27$　　(2)　$\log_2 128$　　(3)　$\log_2\frac{1}{8}$

（解答）(1)　$\log_3 27=r$ とおく．ポイント1の書き換えにより，$3^r=27$

$3^r=27=3^3$ をみたす r は1つしかなかったから，$r=3$　　$\therefore\ \log_3 27=3$

(2)　$\log_2 128=r$ とおく．$2^r=128=2^7$ より $r=7$　　$\therefore\ \log_2 128=7$

(3)　$\log_2\frac{1}{8}=r$ とおく．$2^r=\frac{1}{8}=2^{-3}$ より　$r=-3$　　$\therefore\ \log_2\frac{1}{8}=-3$

確認問題2　**次の対数の値を求めよ．**

□(1)　$\log_2 8$　　□(2)　$\log_9 3$

□(3)　$\log_{\frac{1}{2}}4$　　□(4)　$\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}$

ポイント3　対数法則

指数関数のもつ性質から，対数関数に関する性質を導くことができる．

x，y を正の数，p を実数とするとき（$a>0$，$a \neq 1$），

1）$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

2）$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

3）$\log_a x^p = p\log_a x$

例題　次の対数の値を計算せよ．

(1)　$\log_{10}2 + \log_{10}5$　　(2)　$\log_4 64 - \log_4 16$　　(3)　$\log_2 \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

（解答）(1)　$\log_{10}2 + \log_{10}5 = \log_{10}(2 \times 5) = \log_{10}10 = 1$

(2)　$\log_4 64 - \log_4 16 = \log_4 \dfrac{64}{16} = \log_4 4 = 1$

(3)　$\log_2 \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \log_2\left(2^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)\log_2 2 = -\dfrac{1}{2}$

確認問題 3　次の対数の値を計算せよ．

□(1)　$\log_{12}9 + \log_{12}16$　　□(2)　$\log_3 81 - \log_3 \dfrac{1}{3}$

□(3)　$\log_3 \dfrac{1}{\sqrt{27}}$　　□(4)　$\log_4 \sqrt{32}$

ポイント4　底の変換公式

a，b は底の条件をみたしているとする（すなわち，a，$b>0$，$a \neq 1$，$b \neq 1$）．

x を正の数とするとき，

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

が成り立つ．この式は，a を底とする対数の値を b を底とする対数の式に書き換えている．したがって，異なる底をもった対数を同じ底の対数にそろえるのに便利である．

例題　次の式を簡単にせよ．

(1)　$\log_3 5 \times \log_5 9$　　(2)　$\log_8 \dfrac{1}{16}$　　(3)　$\log_5 7 \div \log_{10} 7$

（解答）(1)　$\log_3 5 \times \log_5 9 = \log_3 5 \times \dfrac{\log_3 9}{\log_3 5} = \log_3 9 = 2$

(2)　$\log_8 \dfrac{1}{16} = \dfrac{\log_2 \frac{1}{16}}{\log_2 8} = \dfrac{-4}{3} = -\dfrac{4}{3}$

(3)　$\log_5 7 \div \log_{10} 7 = \log_5 7 \div \dfrac{\log_5 7}{\log_5 10} = \log_5 10$

確認問題 4　次の式を簡単にせよ．

□(1)　$\log_4 5 \times \log_5 32$　　□(2)　$\log_2 5 \times \log_5 50$　　□(3)　$\log_7 5 \div \log_{49} 5$

練成問題 A

1 指数に関する次の関係式を $r = \log_a R$ の形に書き換えよ. (⇨ポイント１)

□(1) $13^2 = 169$ □(2) $27^{\frac{1}{3}} = 3$ □(3) $10^{-3} = 0.001$

□(4) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ □(5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$ □(6) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{2}} = 9$

2 次の対数の値を求めよ. (⇨ポイント２)

□(1) $\log_2 1024$ □(2) $\log_3 \frac{1}{9}$

□(3) $\log_{10} 0.01$ □(4) $\log_{\frac{1}{3}} 9$

□(5) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$ □(6) $\log_{0.1} 10$

3 次の対数の値を計算せよ. (⇨ポイント３)

□(1) $\log_3 \sqrt[5]{81}$ □(2) $\log_9 \frac{1}{\sqrt{3}}$

□(3) $\log_8 \left(2^{-\frac{3}{4}}\right)$ □(4) $-\log_4 \frac{1}{16} + \log_{16} 4$

□(5) $\log_{\sqrt{50}} (2500)$

4 次の式を簡単にせよ. (⇨ポイント３, ４)

□(1) $\frac{1}{4}\log_3 8 - 2\log_3 4 + \log_3 \frac{1}{\sqrt{2}}$ □(2) $\log_5 8 - \log_5 \frac{1}{4}$

□(3) $\log_5 3 \times \log_3 75$ □(4) $\log_3 8 \div \log_{12} 2$

□(5) $\log_{27} \frac{1}{3}$ □(6) $\dfrac{\log_5 7}{\log_{10} 49}$

□(7) $\log_3 25 \times \log_5 27$

練成問題　B

1　$\log_a x=\alpha$，$\log_a y=\beta$，$\log_a z=\gamma$ とするとき，次の式を α，β，γ で表せ.

□(1)　$\log_a x^3y^2z$　　□(2)　$\log_a\sqrt{xyz}$　　□(3)　$\log_a\dfrac{xz}{y^2}$

□(4)　$\log_a\left(\dfrac{y}{x^2}\times\dfrac{z}{y^2}\times\dfrac{x}{z^2}\right)$　　□(5)　$\log_a\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{y}\sqrt{z}$　　□(6)　$\log_a\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{x}\,y}{z}}$

2　$\log_2 3=\alpha$，$\log_3 5=\beta$ とするとき，次の式を α，β で表せ.

□(1)　$\log_3 2$　　□(2)　$\log_2 5$　　□(3)　$\log_6 5$

□(4)　$\log_{12}25$　　□(5)　$\log_{12}\dfrac{1}{4}$　　□(6)　$\log_{24}75$

3　次の式を簡単にせよ.

□(1)　$5\log_3\sqrt[4]{2}-\log_3 8+\dfrac{3}{2}\log_3\dfrac{1}{2}$　　□(2)　$4\log_5 10-\log_5 16-\dfrac{1}{3}\log_5\dfrac{1}{4}$

□(3)　$2\log_{\frac{1}{2}}4+\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{16}$　　□(4)　$\log_4\dfrac{1}{8}+\log_4\sqrt{96}-\log_4\sqrt[3]{3}$

4　次の式を簡単にせよ.

□(1)　$\log_{16}5-\dfrac{1}{4}\log_{\frac{1}{2}}10$　　□(2)　$\log_{0.25}(4\sqrt{2})$

□(3)　$(\log_2 9-\log_4 27)\times\log_3 6$　　□(4)　$\left(\log_3 16+\dfrac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}}2\right)\left(\log_2 9-\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}\right)$

5　次の２つの数の大小を比較し，大きい方を答えよ

□(1)　$\log_2 7$，$\log_8 100$　　□(2)　$\log_{10}5$，$\log_{\frac{1}{2}}0.1$

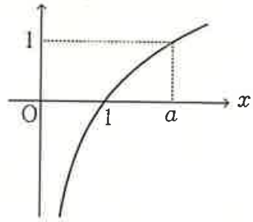
□(3)　$\log_{\frac{1}{3}}2$，$\log_2\dfrac{1}{3}$　　□(4)　$\log_3 6$，$\log_3 15^{\frac{2}{3}}$

33 対数関数とそのグラフ

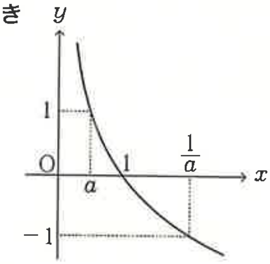
ポイント1 対数関数のグラフ

a を正の実数で $a \neq 1$ とする．関数 $y = \log_a x$ のグラフの概形は次の通り．

$a > 1$ のとき



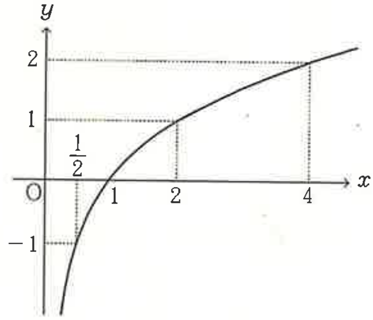
$0 < a < 1$ のとき



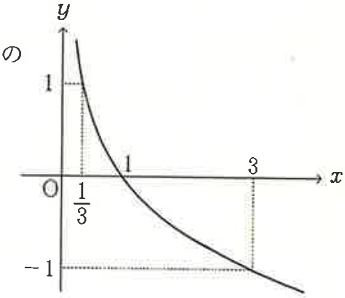
例題 $y = \log_2 x$，$y = \log_{\frac{1}{3}} x$ のグラフの概形を描け．

(解答)

$y = \log_2 x$ のグラフ



$y = \log_{\frac{1}{3}} x$ のグラフ



確認問題 1. 次の関数のグラフの概形を描け．

□(1) $y = \log_3 x$　　□(2) $y = \log_4 x$　　□(3) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$

ポイント2 対数方程式(1)

$y = \log_a x$ に共通した性質として，

1) 関数が定義されるのは $x > 0$ の範囲だけである．

2) 必ず $(1,\ 0)$ を通り，y 軸が漸近線になる．

3) **$a > 1$ のとき，$u < v \iff \log_a u < \log_a v$**

$0 < a < 1$ のとき，$u < v \iff \log_a u > \log_a v$

この 1)，2)，3) は p.160 の指数関数の性質 1)，2)，3) を対数関数の言葉に書き換えたものである．

3) が指数関数の応用で重要な働きをしたように，上の対数関数の性質の中でも 3) は重要な性質である．なお，対数関数の問題では $0 < a < 1$ が使われることはまれで，たいてい $a > 1$ である．

注意 対数関数 $y = \log_a x$ のグラフと指数関数 $y = a^x$ のグラフは直線 $y = x$ に関して対称になっている．

例題 方程式 $\log_3(x + 1) = 2$ を解け．

(解答) $2 = \log_3 9$．上の性質 3) より，$\log_3(x + 1) = \log_3 9$ をみたす $(x + 1)$ の値はただ 1 つ．

よって，$x + 1 = 9$　　$\therefore\ x = 8$（これは真数条件 $x + 1 > 0$ をみたしている）

確認問題2 次の方程式を解け．

□(1) $\log_2(2x-1)=2$　　□(2) $\log_3(2-3x)=-1$　　□(3) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{4}=3$

ポイント3 対数不等式(1)

例題1 不等式 $\log_2(3x+1)<3$ を解け．

(解答) 真数条件より　$3x+1>0$　　$\therefore\ x>-\frac{1}{3}$ …… ①

$3=\log_2 8$．ポイント2の性質 **3)** より，$3x+1<8$ なら $\log_2(3x+1)<\log_2 8$ をみたし，逆も正しい．

$\therefore\ x<\frac{7}{3}$ …… ②

①，②より　$-\frac{1}{3}<x<\frac{7}{3}$

例題2 $\sqrt[4]{3}$ と $\sqrt[10]{27}$ の大小を比較せよ．

(解答) 3を底とする対数をとると，$\log_3\sqrt[4]{3}=\frac{1}{4}$，$\log_3\sqrt[10]{27}=\frac{3}{10}$．$\frac{1}{4}<\frac{3}{10}$ なので，$\sqrt[10]{27}>\sqrt[4]{3}$

注意　これは指数関数のところでやった $\sqrt[4]{3}=3^{\frac{1}{4}}$，$\sqrt[10]{27}=(3^3)^{\frac{1}{10}}=3^{\frac{3}{10}}$，$\frac{3}{10}>\frac{1}{4}$ を用いて比較する方法を，対数の記号を使って書き直したものである．

確認問題3 次の問に答えよ．

(1) 次の不等式を解け．

□① $\log_3(4x+1)<2$　　□② $\log_2\left(\frac{x}{3}+1\right)\geqq\frac{1}{2}$　　□③ $\log_3\left(-\frac{x}{2}+1\right)<3$

(2) 次の2つの数の大小を比較せよ．

□① $\sqrt[4]{4}$，$\sqrt[10]{128}$　　□② $2^{-\frac{3}{5}}$，$\frac{1}{\sqrt[3]{32}}$

ポイント4 対数方程式・不等式(2)

例題1 方程式 $\log_2(x-1)+\log_2(x+1)=1$ を解け．

(解答) 真数条件　$x-1>0$，$x+1>0$ より　$x>1$ …… ①

$\log_2(x^2-1)=\log_2 2$，　$x^2-1=2$　　$\therefore\ x=\pm\sqrt{3}$　　①より　$x=\sqrt{3}$

例題2 不等式 $\log_2(x-1)+\log_2(x+1)<1$ を解け．

(解答) 真数条件　$x-1>0$，$x+1>0$ より　$x>1$ …… ①

$\log_2(x^2-1)<\log_2 2$，　$x^2-1<2$，　$x^2-3<0$，　$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})<0$

$\therefore\ -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ …… ②

①，②より　$1<x<\sqrt{3}$

確認問題4 次の方程式，不等式を解け．

□(1) $\log_2(2x-1)+\log_2(x-2)=1$　　□(2) $\log_5(x+1)+\log_5(x-3)=1$

□(3) $\log_5(x+1)+\log_5(x-3)<1$　　□(4) $\log_2(x-1)+\log_2(x+2)\geqq 2$

ポイント5　対数関数の最大・最小

対数を含む関数について，最大値や最小値を求めることを考えることができる．

例題　**関数 $y=(\log_3 x)^2-\log_3 x^4+5$ $(1\leqq x\leqq 27)$ について，次の問に答えよ．**

(1)　$\log_3 x=t$ とおくとき，t の値の範囲を求めよ．

(2)　この関数の最大値と最小値を求めよ．

(解答) (1)　$1\leqq x\leqq 27$ で $1<3$ だから $\log_3 1\leqq\log_3 x\leqq\log_3 27$ だから

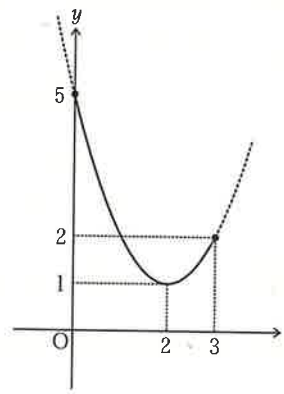
$0\leqq t\leqq 3$

(2)　$y=(\log_3 x)^2-\log_3 x^4+5$

$=(\log_3 x)^2-4\log_3 x+5$

$=t^2-4t+5$

$=(t-2)^2+1$



右図より

最大値 5 $(t=0)$

最小値 1 $(t=2)$

ここで

$$\begin{cases} t=0 \text{ より} & \log_3 x=0, \quad x=1 \\ t=2 \text{ より} & \log_3 x=2, \quad x=9 \end{cases}$$

答　最大値　5 $(x=1)$，最小値　1 $(x=9)$

確認問題 5　次の問に答えよ．

(1)　関数 $y=(\log_2 x)^2-\log_2 x^2-1$ $(1\leqq x\leqq 64)$ について，次の問に答えよ．

□①　$\log_2 x=t$ とおくとき，t の値の範囲を求めよ．

□②　この関数の最大値と最小値を求めよ．

(2)　関数 $y=(\log_5 x)^2-\log_5 x^3+1$ $(1\leqq x\leqq 125)$ について，次の問に答えよ．

□①　$\log_5 x=t$ とおくとき，t の値の範囲を求めよ．

□②　この関数の最大値と最小値を求めよ．

練成問題 A

1 次の関数のグラフの概形を描け. (⇨ポイント１)

□(1) $y = \log_5 x$

□(2) $y = \log_{\frac{5}{2}} x$

□(3) $y = \log_{10} x$

2 次の方程式を解け. (⇨ポイント２)

□(1) $\log_3(x + 5) = 2$

□(2) $\log_2(2x + 1) = 2$

□(3) $\log_{\frac{2}{3}}(1 - x) = 1$

□(4) $\log_{\frac{3}{4}}(3x - 1) = -1$

□(5) $\log_5\left(\frac{x + 1}{2}\right) = 2$

□(6) $\log_9\left(\frac{3x - 1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

3 次の不等式を解け. (⇨ポイント３)

□(1) $\log_2(x + 3) \leqq 3$

□(2) $\log_3(2x - 1) \geqq 2$

□(3) $\log_{\frac{1}{4}}(x - 1) \leqq \frac{1}{2}$

□(4) $1 < \log_3\left(\frac{x + 3}{2}\right)$

□(5) $-2 \leqq \log_{\frac{1}{2}} x$

□(6) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{-x + 1}{2} > -1$

4 次の２つの数の大小を比較せよ. (⇨ポイント３)

□(1) $\log_3 \sqrt[3]{9}$, $\log_3 \sqrt[4]{27}$

□(2) $\log_2 2^{-\frac{1}{5}}$, $\log_2 16^{-\frac{1}{8}}$

□(3) $\log_4 \sqrt[6]{5}$, $\log_4 \sqrt[10]{125}$

□(4) $\log_{\sqrt{10}} 0.001$, $\log_{\frac{1}{2}} 512$

5 次の方程式，不等式を解け． (⇨ポイント４)

□(1) $\log_2(x+2)+\log_2(2x+1)=1$

□(2) $\log_3(2x-1)^2=\log_3 x$

□(3) $\log_5(3x+1)-\log_5(2x-1)=1$

□(4) $\log_5(5x^2-x+1)\leqq 1$

□(5) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-4x+4)\geqq -1$

□(6) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\geqq -\log_{\frac{1}{2}}(x-3)-2$

6 関数 $y=(\log_2 x)^2-\log_2 x^5-1$ （$1\leqq x\leqq 16$）について，次の問に答えよ． (⇨ポイント５)

□(1) $\log_2 x=t$ とおくとき，t の値の範囲を求めよ．

□(2) この関数の最大値と最小値を求めよ．

7 関数 $y=(\log_3 x)^2-\log_3 x^6+1$ （$1\leqq x\leqq 81$）について，次の問に答えよ． (⇨ポイント５)

□(1) $\log_3 x=t$ とおくとき，t の値の範囲を求めよ．

□(2) この関数の最大値と最小値を求めよ．

練成問題　B

1　次の関数のグラフの概形を描け．さらにそのグラフは $y = \log_2 x$ とどのような関係にあるか答えよ．

□(1)　$y = \log_2(x - 2)$

□(2)　$y = \log_2(2x)$

□(3)　$y = \log_{\frac{1}{2}} x$

□(4)　$y = \log_2 \frac{1}{x}$

2　次の式をみたす正数 a の値を求めよ．

□(1)　$\log_a 9 = 4$

□(2)　$\log_a 4 = -1$

□(3)　$\log_a 2 + \log_{a^2} 2 = 3$

□(4)　$\log_a \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$

3　次の不等式を解け．

□(1)　$0 \leqq \log_3(2x^2 + 5x + 3) \leqq 1$

□(2)　$|\log_2(x + 1)| < 1$

□(3)　$\log_5|2x + 1| \geqq 2$

□(4)　$\log_{\frac{1}{3}}(2x + 1) + 1 + \log_{\frac{1}{3}}(x - 2) < 0$

□(5)　$\log_4(x^2 - x - 2) > 1$

□(6)　$\left|\log_{\frac{1}{2}}(2x + 1)\right| > 1$

4　次の方程式を解け．

□(1)　$\log_2(-x^2 + 4x - 1) = 1$

□(2)　$\log_{\frac{1}{3}}(4x^2 - 2x + 1) = -1$

□(3)　$\log_3(x + 1) + \log_9(x + 1) = 3$

□(4)　$\log_{\frac{1}{2}}(2x - 1) + \log_2(x^2 + 1) = 1$

5　次の関数の最大値，最小値を求めよ．

□(1)　$y = \log_{\frac{1}{2}} x \quad (2 \leqq x \leqq 16)$

□(2)　$y = \log_3 x \quad (1 < x \leqq 81)$

□(3)　$y = \log_5 \sqrt{x} \quad (1 \leqq x \leqq 100)$

□(4)　$y = (\log_{\frac{1}{2}} x)^2 \quad \left(\frac{1}{2} \leqq x \leqq 2\right)$

34 常用対数

ここでは，対数関数の1つ，10を底とする対数の応用について学ぶ．我々が10進法を用いている関係上，10を底とする対数は大変有用なので，これを特に**常用対数**と呼んでいる．

ポイント1 常用対数表の使い方：対数の値

1) $1.00 \leqq x \leqq 9.99$ までのとき．$\log_{10}x$ の値は巻末の常用対数表から直接求めることができる．

例題1 次の値を表から読みとれ．

(1) $\log_{10}2.00$　　(2) $\log_{10}3.14$　　(3) $\log_{10}6.86$

(解答) (1)

数	0	1	
1.0	.0000		
⋮			
2.0	.3010	.3032	…

1番左の列が求めたい x の小数第1位までの数を表し，その右の欄が小数第2位の数を表している．左の表より，

$\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$（2は表では2.00）

(2) 同様に，$\log_{10}3.14 \fallingdotseq 0.4969$

(3) 同様に，$\log_{10}6.86 \fallingdotseq 0.8363$

2) $x \geqq 10.0$ または $0 < x < 1.00$ のときには，次の例題のようにすると大体の値が求まる．

例題2 次の常用対数の値を求めよ．

(1) $\log_{10}15.3$　　(2) $\log_{10}0.521$

(解答) (1) $\log_{10}15.3 = \log_{10}(10 \times 1.53) = \log_{10}10 + \log_{10}1.53$

$\log_{10}10 = 1$，$\log_{10}1.53 \fallingdotseq 0.1847$　$\therefore$ $\log_{10}15.3 \fallingdotseq 1 + 0.1847 = 1.1847$

(2) $\log_{10}0.521 = \log_{10}(5.21 \times 10^{-1}) = \log_{10}5.21 + \log_{10}(10^{-1})$

$\log_{10}(10^{-1}) = -1$，$\log_{10}5.21 = 0.7168$　$\therefore$ $\log_{10}0.512 \fallingdotseq 0.7168 - 1 = -0.2832$

確認問題1 巻末の常用対数表を用いて，次の問に答えよ．

(1) 次の値を常用対数表から読みとれ．

□① $\log_{10}4.81$　　□② $\log_{10}2.04$

□③ $\log_{10}7.50$　　□④ $\log_{10}1.18$

(2) 次の常用対数の値を求めよ．

□① $\log_{10}126$　　□② $\log_{10}733$

□③ $\log_{10}0.432$　　□④ $\log_{10}0.028$

ポイント2 対数を用いた近似値の計算(1)

例題1 巻末の常用対数表を用いて，$\sqrt[4]{5}$ の近似値を求めよ．

(解答) $\log_{10}\sqrt[4]{5} = \dfrac{1}{4}\log_{10}5$

対数表より，$\log_{10}5 \fallingdotseq 0.6990$　　$\therefore$　$\log_{10}\sqrt[4]{5} \fallingdotseq \dfrac{1}{4} \times 0.6990 = 0.17475$

$\log_{10}x \fallingdotseq 0.17475$ となる x をふたたび対数表を用いて探すと，

　$\log_{10}1.49 \fallingdotseq 0.1732$，$\log_{10}1.50 \fallingdotseq 0.1761$

したがって，$x \fallingdotseq 1.49$（精密には誤差についての計算が必要）

例題2 $\log_{10}2 = 0.3010$，$\log_{10}3 = 0.4771$ として，次の値を求めよ．

(1) $\log_{10}6$　　(2) $\log_{10}10.8$

(解答) (1) $\log_{10}6 = \log_{10}2 + \log_{10}3$
$= 0.3010 + 0.4771$
$= 0.7781$

(2) $108 = 2^2 \times 3^3$ より
$\log_{10}10.8 = \log_{10}108 - 1$
$= 2\log_{10}2 + 3\log_{10}3 - 1$
$= 1.0333$

確認問題2 次の問に答えよ．

(1) 巻末の常用対数表を用いて，次の数の近似値を求めよ．

□① $\sqrt[3]{7}$　　□② $3^{\frac{2}{5}}$　　□③ $\sqrt[3]{18}$　　□④ $\sqrt[3]{0.032}$

(2) $\log_{10}2 = 0.3010$，$\log_{10}3 = 0.4771$ として，次の値を求めよ．

□① $\log_{10}5$　　□② $\log_{10}24$　　□③ $\log_{10}120$　　□④ $\log_{10}0.18$

ポイント3 対数を用いた近似値の計算(2)

正数 x の整数部分が n 桁（けた）の数であること，つまり $10^{n-1} \leqq x < 10^n$ と $n - 1 \leqq \log_{10}x < n$ とは同値である．

また，x を 1 以下の正数とするとき，x の小数第 n 位に初めて 0 でない数が現れること，つまり，$10^{-n} \leqq x < 10^{-(n-1)}$ と $-n \leqq \log_{10}x < -n + 1$ とは同値である．

この性質を用いて，大きな数や小さな数の見当をつけることができる（精密に答えるためには誤差についての計算が必要）．

例題1 $\log_{10}2 = 0.3010$ とする．2^{20} は何桁（けた）の数か．

(解答) $\log_{10}2^{20} = 20\log_{10}2 \fallingdotseq 6.02$　　$\therefore$　$6 < \log_{10}2^{20} < 7$

よって　$10^6 < 2^{20} < 10^7$

ゆえに，2^{20} は 7 桁の数である．

例題2 $\log_{10}2 = 0.3010$ とする．2^{-8} は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか．

(解答) $\log_{10}(2^{-8}) = -8\log_{10}2 \fallingdotseq -2.408$　　$\therefore$　$-3 < \log_{10}(2^{-8}) < -2$

よって　$10^{-3} < 2^{-8} < 10^{-2}$

ゆえに，2^{-8} で初めて 0 でない数字が現れるのは，小数第 3 位である．

確認問題 3 次の問に答えよ．

(1) $\log_{10}2 = 0.3010$，$\log_{10}3 = 0.4771$ とする．次の数は何桁(けた)の数か．

□① 3^{15} □② 18^{9} □③ 12^{7}

(2) $\log_{10}2 = 0.3010$，$\log_{10}3 = 0.4771$ とする．次の問に答えよ．

□① $\left(\frac{1}{4}\right)^{8}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか．

□② $\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか．

□③ 3^{-30} は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか．

ポイント 4 常用対数の文章題

例題 **あるバクテリアは 10 分ごとに分裂して 2 倍に増えるとする．このバクテリア 5 個が分裂を始めて，100 万個を超えるのは何時間後かを求めよ．ただし，$\log_{10}2 = 0.3010$ とする．**

(解答) x 時間後のバクテリアの個数は

5×2^{6x}

これが $1000000 = 10^6$ 個以上であるとすると

$5 \times 2^{6x} \geqq 10^6$

$2^{6x} \geqq 2 \times 10^5$

両辺の常用対数をとると，

$\log_{10}2^{6x} \geqq \log_{10}2 \cdot 10^5$

$6x\log_{10}2 \geqq \log_{10}2 + 5$

$\log_{10}2 = 0.3010$ より

$1.806x \geqq 5.301$

$x \geqq 2.93\cdots$

これより 3 時間後に 100 万個を超える．

確認問題 4 次の問に答えよ．

□(1) あるバクテリアは 20 分ごとに分裂して 2 倍に増えるとする．このバクテリア 8 個が分裂を始めて 1000 万個を超えるのは何時間後かを求めよ．ただし，$\log_{10}2 = 0.3010$ とする．

□(2) あるガラス板を 1 枚通るごとに，光線はその強さの 2 割を失う．このガラス板を何枚以上重ねると，これを通ってきた光線の強さがもとの強さの $\frac{1}{4}$ 以下になるか．ただし，$\log_{10}2 = 0.3010$ とする．

練成問題　A

1　巻末の常用対数表を用いて，次の常用対数の値を求めよ．　(⇨ポイント 1)

□(1)　$\log_{10}3.83$　　□(2)　$\log_{10}9.12$

□(3)　$\log_{10}5.51$　　□(4)　$\log_{10}43.6$

□(5)　$\log_{10}726$　　□(6)　$\log_{10}6.37$

□(7)　$\log_{10}0.392$　　□(8)　$\log_{10}0.00681$

2　巻末の常用対数表を用いて，次の数の近似値を求めよ．　(⇨ポイント 2)

□(1)　$\sqrt[8]{27}$　　□(2)　$\sqrt[4]{18}$

□(3)　$40^{\frac{1}{3}}$　　□(4)　$\sqrt[4]{1000}$

□(5)　$\sqrt[3]{0.275}$　　□(6)　$(0.0188)^{\frac{1}{4}}$

3　$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ として，次の値を求めよ．　(⇨ポイント 2)

□(1)　$\log_{10}48$　　□(2)　$\log_{10}15$

□(3)　$\log_{10}250$　　□(4)　$\log_{10}0.096$

4　$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする．次の数は何桁(けた)の数か．　(⇨ポイント 3)

□(1)　24^6

□(2)　5^{12}

□(3)　$\sqrt[3]{5000000}$

□(4)　$6^{\frac{20}{3}}$

5 $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．次の問に答えよ．　　(⇨ポイント３)

□(1)　$\left(\frac{1}{3}\right)^{15}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか．

□(2)　$\left(\frac{1}{5}\right)^{18}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか．

□(3)　$6^{-\frac{16}{3}}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか．

□(4)　$(0.02)^{13}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか．

6 次の問に答えよ．　　(⇨ポイント４)

□(1)　ある放射性物質は，一定の割合で崩壊し，12 日たつと量が半分になるという．この放射性物質が現在の量の $\frac{1}{100}$ 以下になるのは何日目か．ただし，$\log_{10}2 = 0.3010$ とする．

□(2)　あるガラス板を 1 枚通るごとに，光線はその強さの $\frac{1}{10}$ を失う．このガラス板を何枚以上重ねると，これを通ってきた光線の強さがもとの強さの $\frac{1}{2}$ 以下となるか．ただし，$\log_{10}2 = 0.3010$，$\log_{10}3 = 0.4771$ とする．

練成問題 B

1 巻末の常用対数表を用いて，次の x の値の近似値を求めよ．

□(1) $\log_{10} x = 0.24$　□(2) $\log_{10} x = 0.80$　□(3) $\log_{10} x = 1.38$

□(4) $\log_{10} x = 4.10$　□(5) $\log_{10} x = -0.55$　□(6) $\log_{10} x = -3.11$

2 $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．次の問に答えよ．

□(1) $2^n < 3^{15} < 2^{n+1}$ をみたす自然数 n の値を求めよ．

□(2) $3^n < 2^{20} < 3^{n+1}$ をみたす自然数 n の値を求めよ．

□(3) $5^n < 6^{10} < 5^{n+1}$ をみたす自然数 n の値を求めよ．

□(4) $18^n < 5^{20} < 18^{n+1}$ をみたす自然数 n の値を求めよ．

3 $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．次の問に答えよ．

□(1) $2^{-n} < 0.0001$ をみたす最小の自然数 n を求めよ．

□(2) $3^{-n} < 0.0001$ をみたす最小の自然数 n を求めよ．

□(3) $\left(\frac{1}{6}\right)^n$ は小数第 6 位に初めて 0 でない数字が現れる．こうした n の中で最小のものを求めよ．

□(4) $\left(\frac{1}{12}\right)^n$ は小数第 10 位に初めて 0 でない数字が現れる．こうした n の中で最小のものを求めよ．

4 $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 4.771$ とする．次の問に答えよ．（答えは小数第３位で四捨五入せよ）

□(1) $\log_2 3$ の値を小数第 2 位まで求めよ．

□(2) $\log_3 250$ の値を小数第 2 位まで求めよ．

□(3) $\log_6 1000$ の値を小数第 2 位まで求めよ．

□(4) $\log_6 0.125$ の値を小数第 2 位まで求めよ．

練成問題C（4）

1□ **関数 $y = 4^x - 2^{x+2} + 2$ の $-1 \leqq x \leqq 2$ における最大値と最小値の和を求めよ．**

2□ **次の問に答えよ．**

長さが a のひもをある機械に通すと長さが $\frac{9}{10}a$ になるという．このとき，長さ1のひもを n 回この機械に通すと，長さ $\boxed{\text{ア}}$ となり，長さが $\frac{1}{3}$ より短くなるのは $\boxed{\text{イ}}$ 回からである．ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

3 **次の $\boxed{}$ を埋めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.301$，$\log_{10} 3 = 0.477$ とする．**

□(1)　$4^{17} \times 3^5$ は $\boxed{}$ 桁(けた)である．

□(2)　$32^a \times 27^b$ が9桁(けた)になる正の整数 a，b の組み合わせは $\boxed{}$ 通りである．

4□ **次の $\boxed{}$ を埋めよ．**

$16x^{\log_2 x} = x^5$ をみたす x の値は，$x = \boxed{}$ である．

5□ **次の問に答えよ．**

関数 $f(x) = 4^{x+1} - 2^{x+1.5} + 3$ は，$x = \boxed{\text{ア}}$ で最小値 $\boxed{\text{イ}}$ をとる．

6□ **$a = \log_2 3$ とする．このとき $\log_{12} 18$ を a を用いて表せ．**

7□ **次の $\boxed{}$ を埋めよ．**

関数 $y = 8^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+2}$ は $x = \boxed{\text{ア}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{イ}}$ である．

8□ **次の $\boxed{}$ を埋めよ．**

$\log_a(x+1) + \log_a(2-x) = -1$ をみたす実数 x が存在するためには，a は $\boxed{\text{ア}} \leqq a < \boxed{\text{イ}}$ または $\boxed{\text{ウ}} < a$ の範囲になければならない．

9□ 次の $\boxed{}$ を埋めよ．

方程式 $\log_2(3^x - a) + 1 = 0$ をみたす実数 x が存在するためには，実数 a は $a >$ $\boxed{ア}$ の範囲になければならない．そのとき，x を a を用いて表すと $x =$ $\boxed{イ}$ である．

10 a，b，c，d が，いずれも 1 以外の正の数であるとき，次の等式を証明せよ．

□(1) $(\log_a b)(\log_b a) = 1$

□(2) $(\log_a b)(\log_b c)(\log_c d)(\log_d a) = 1$

11 次の方程式を解け．

□(1) $8^x - 4^{x+1} = 2^{x+5}$

□(2) $\log_2 x - 2\log_x 4 = 3$

12□ 次の不等式をみたす x の範囲を求めよ．

$$\log_2(x+1) - \log_2(x-1) < 3$$

13□ 次の問に答えよ．

x の関数 $\log_2\left(x^2 + \sqrt{2}\right)$ は $x =$ $\boxed{ア}$ のとき，最小値 $\boxed{イ}$ をとる．a を定数とするとき，x の方程式

$$\left\{\log_2\left(x^2 + \sqrt{2}\right)\right\}^2 - 2\log_2\left(x^2 + \sqrt{2}\right) + a = 0 \quad \cdots\cdots \quad ①$$

が解をもつ条件は $a \leqq$ $\boxed{ウ}$ である．$a =$ $\boxed{ウ}$ のとき方程式①は $\boxed{エ}$ 個の解をもち，また方程式①が 3 個の解をもつのは $a =$ $\boxed{オ}$ のときである．

14 次の問に答えよ．ただし，$\log_2 3 = 1.5849\cdots$，$\log_2 7 = 2.8073\cdots$ である．

□(1) $\log_2 2352$ の値を四捨五入して小数第 2 位まで求めよ．

□(2) $6 < 2^{\sqrt{7}} < 7$ であることを示せ．

□(3) $\dfrac{7}{5} < \log_2(\log_2 7) < \dfrac{3}{2}$ であることを示せ．