4　複素数

ポイント1　負の数の平方根

x が実数のとき $x^2 \geqq 0$ であるから，負の実数の平方根は実数のなかにはない。そこで実数とは異なる数 i を考え，$i^2 = -1$ とする。i を**虚数単位**という。i を含む数についても，$i^2 = -1$ であるほかは実数と同じように計算できるものとする。

例 (1)　$i^2 = -1$，$(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$

であり，-1 の平方根は $\pm i$ と表せる。

(2)　-3 の平方根は $\pm\sqrt{3}\,i$。実際，

$$(\pm\sqrt{3}\,i)^2 = (\pm\sqrt{3})^2 i^2 = 3 \cdot (-1) = -3$$

(3)　-25 の平方根は $\pm 5i$。実際，

$$(\pm 5i)^2 = (\pm 5)^2 i^2 = 25 \cdot (-1) = -25$$

確認問題 1　次の数の平方根を求めよ。

□(1)　-2　　□(2)　-5　　□(3)　-4

□(4)　-16　　□(5)　-12　　□(6)　-27

ポイント2　$a<0$ のときの $\sqrt{a}$

虚数単位 i を用いて，次のように定める。

$\boldsymbol{a < 0}$ **のとき，** $\boldsymbol{\sqrt{a} = \sqrt{-a}\,i}$

すると，実数 a の平方根はつねに $\pm\sqrt{a}$ と表せる。

例　$\sqrt{-3} = \sqrt{3}\,i$

$\sqrt{-4} = 2i$

注意　a, b が正の数とは限らないとき，公式 $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$，$\sqrt{\dfrac{b}{a}} = \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ はつねに成り立つとは限らない。たとえば

$$\sqrt{(-3)(-2)} = \sqrt{6} \neq -\sqrt{6} = (\sqrt{3}\,i) \cdot (\sqrt{2}\,i) = \sqrt{-3}\sqrt{-2}$$

$$\sqrt{\frac{10}{-2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}\,i \neq \frac{\sqrt{5}}{i} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}\,i} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{-2}}$$

確認問題 2　次の数を簡単にせよ。

□(1)　$\sqrt{-6}$　　□(2)　$\sqrt{-15}$　　□(3)　$\sqrt{-8}$

□(4)　$\sqrt{-63}$　　□(5)　$\sqrt{-25}$　　□(6)　$\sqrt{-1}$

ポイント3　複素数

虚数単位 i と実数 a，b によって $\alpha = a + bi$ の形に表される数 α を**複素数**という。このとき a を複素数 α の**実部**，b を**虚部**という。

$b = 0$ のときは $\alpha = a$ となるから，α は実数である。このように実数は複素数の特別なものとみなす。実数でない複素数（$b \neq 0$）を**虚数**といい，特に $a = 0$ のときは**純虚数**という。

例　(1)　複素数 $5 + 3i$ の実部は 5，虚部は 3

また，複素数 $3 - i$ の実部は 3，虚部は -1

(2)　$\sqrt{2}\,i$ は純虚数で，その実部は 0，虚部は $\sqrt{2}$

複素数 7 は実数で，その実部は 7，虚部は 0

注意　実数は複素数のうちの特別なものとみなすのだから，これは数として考えるものを実数から複素数へと拡張したことになっている。この関係は，有理数と無理数をあわせて実数を考えたことと似ている。数の拡張は次図のようになっている。

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{自然数}\ (1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\\ \qquad 0\\ \text{負の整数}\end{array}\right\}\text{整数}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\text{分数}\end{array}\right\}\text{有理数}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{無理数}\end{array}\right\}\text{実数}\end{array}\right.\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\text{虚数}\end{array}\right\}\text{複素数}$$

なお，実数の定義は“数直線上の点として表される数”，無理数の定義は“有理数でない実数”である。

確認問題 3　次の問に答えよ。

(1)　次の複素数の実部および虚部をそれぞれ求めよ。

□①　$1 + i$　　□②　$3 - 5i$　　□③　$-4 + 3i$

□④　$2i$　　□⑤　$-3i$　　□⑥　5

□(2)　複素数 $5 + i$，$\sqrt{2}$，$7i$，$\sqrt{-3}$ のうちから虚数，純虚数をそれぞれ選べ。

ポイント4　複素数の相等

a，b，c，d は実数，i は虚数単位のとき

$$\boldsymbol{a + bi = c + di \iff a = c,\ b = d}$$

特に　$\boldsymbol{a + bi = 0 \iff a = b = 0}$

例題　**$(2x + 1) + (y - 1)i = 5 - 3i$ となる実数 x，y を求めよ。**

(解答)　$\begin{cases} 2x + 1 = 5 \\ y - 1 = -3 \end{cases}$ より，$x = 2$，$y = -2$

確認問題 4　次の問に答えよ。

□(1)　$x + 3i = 7 + yi$ となる実数 x，y を求めよ。

□(2)　$(5x - 2) + (3y + 4)i = 3 - 2i$ となる実数 x，y を求めよ。

練成問題 A

1 次の数の平方根を求めよ。 (⇨ ポイント1)

□(1) -7 □(2) -11 □(3) -15 □(4) -21

□(5) -9 □(6) -49 □(7) -20 □(8) -45

□(9) -72 □(10) -56

2 次の数を簡単にせよ。 (⇨ ポイント2)

□(1) $\sqrt{-2}$ □(2) $\sqrt{-14}$ □(3) $\sqrt{-9}$ □(4) $\sqrt{-64}$

□(5) $\sqrt{-12}$ □(6) $\sqrt{-18}$ □(7) $\sqrt{-50}$ □(8) $\sqrt{-36}$

□(9) $\sqrt{-28}$ □(10) $\sqrt{-99}$ □(11) $\sqrt{-\frac{1}{2}}$ □(12) $\sqrt{-\frac{3}{4}}$

□(13) $\sqrt{-\frac{1}{9}}$ □(14) $\sqrt{-\frac{4}{7}}$ □(15) $\sqrt{-\frac{1}{12}}$ □(16) $\sqrt{-\frac{25}{49}}$

3 次の複素数の実部および虚部をそれぞれ求めよ。 (⇨ ポイント3)

□(1) $-1-i$ □(2) $7+4i$ □(3) $5+7i$

□(4) $-3+8i$ □(5) $-5+\sqrt{2}\,i$ □(6) $2-i$

□(7) $12+i$ □(8) $-8+\sqrt{3}\,i$ □(9) $-\sqrt{2}+\sqrt{5}\,i$

□(10) i □(11) $6i$ □(12) $-7i$

□(13) $-i$ □(14) $-\sqrt{5}\,i$ □(15) 12

□(16) 1 □(17) -4 □(18) $\sqrt{3}$

4 □　**次の複素数のうちから虚数，純虚数をそれぞれ選べ。**　**(⇨ ポイント３)**

$7-i$,　$\sqrt{2}\,i$,　$\sqrt{17}$,　$-1-i$,　$\sqrt{-4}$

5　**次の問に答えよ。**　**(⇨ ポイント４)**

□(1)　$2x+i=6-yi$ となる実数 x，y を求めよ。

□(2)　$x+5i=4+2yi$ となる実数 x，y を求めよ。

□(3)　$(3x-7)+(y+2)i=2+5i$ となる実数 x，y を求めよ。

□(4)　$(7x+2)+(-y+4)i=-12+i$ となる実数 x，y を求めよ。

□(5)　$(x+y)+(x-y)i=3+i$ となる実数 x，y を求めよ。

□(6)　$(3x+2y)+(2x+y+1)i=5+5i$ となる実数 x，y を求めよ。

□(7)　$(4x+3)+(2y-8)i=0$ となる実数 x，y を求めよ。

□(8)　$(3x-9)+(5y+6)i=0$ となる実数 x，y を求めよ。

5　複素数の計算

ポイント1　複素数の加法・減法

a, b, c, d は実数とする。

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

例　$(3+2i)+(5-7i)=(3+5)+(2-7)i$
$\qquad\qquad\qquad\qquad = 8-5i$

$(1+i)-(-4+3i)=\{1-(-4)\}+(1-3)i$
$\qquad\qquad\qquad\qquad = 5-2i$

確認問題 1　次の計算をせよ。

□(1)　$(1+i)+(5-2i)$　　□(2)　$(7-2i)+(4+8i)$

□(3)　$(-1+5i)-(3+i)$　　□(4)　$(12+6i)-(9-3i)$

ポイント2　複素数の乗法

一般に，複素数の計算は，i の多項式と同じように計算して，i^2 が出てきたら -1 で置き換える。

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di)&=a(c+di)+bi(c+di)\\&=ac+(ad+bc)i+bdi^2\\&=(ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

例　$(3-2i)(-1+i)=-3+3i+2i-2i^2$
$\qquad\qquad\qquad\qquad = -1+5i$

$(\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i)(\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i)=2-\sqrt{6}\,i+\sqrt{6}\,i-3i^2$
$\qquad\qquad\qquad\qquad = 5$

注意　複素数の計算について，加法・乗法の交換法則，結合法則，分配法則が成り立ち，実数の場合と同じような計算ができる。

厳密に複素数を定義するには，$a+bi$ という形の記号の間の加法・乗法などを先に定義してから，それが確かに計算法則を満たしていることを確認することになる。

確認問題 2　次の計算をせよ。

□(1)　$(3+i)(1-i)$　　□(2)　$(5-2i)(3+2i)$

□(3)　$(-1+7i)(4-3i)$　　□(4)　$(-3-5i)(-1+4i)$

ポイント3　共役複素数

複素数 $\alpha = a + bi$（a，b は実数）に対して，

$\overline{\alpha} = a - bi$

を α の**共役複素数**という。また，α，$\overline{\alpha}$ は**互いに共役**であるということもある。

注意　共役は「きょうやく」と読む。

例 (1)　$\alpha = -1 + 3i$ のとき，$\overline{\alpha} = -1 - 3i$

　　また $\alpha = 7 - 2i$ のとき，$\overline{\alpha} = 7 + 2i$

(2)　$\overline{5 - 2i} = 5 + 2i$，$\overline{\sqrt{3} + \sqrt{2}\,i} = \sqrt{3} - \sqrt{2}\,i$

　　$\overline{i} = -i$，$\overline{2i} = -2i$

　　$\overline{3} = 3$，$\overline{1 - \sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}$

確認問題 3　次の複素数の共役複素数を求めよ。

□(1)　$3 + 5i$　　□(2)　$4 - 2i$　　□(3)　$10i$　　□(4)　6

ポイント4　複素数の除法

複素数の割り算は，分数の形に書いてから，分母・分子に分母の共役複素数を掛ければよい。

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

$c = d = 0$，つまり $c + di = 0$ のとき以外は，つねに割り算が可能である。このことから特に，2つの複素数 α，β について

$\alpha\beta = 0 \iff \alpha = 0$ **または** $\beta = 0$

であることがわかる。

例 (1)　$\dfrac{3+2i}{1+i} = \dfrac{(3+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{5-i}{1^2+1^2} = \dfrac{5-i}{2}\ \left(= \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)$

(2)　$\dfrac{11-3i}{2+3i} = \dfrac{(11-3i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \dfrac{13-39i}{2^2+3^2} = \dfrac{13-39i}{13} = 1 - 3i$

注意　ここまででわかったように，複素数は四則計算については実数と同じように計算できる。だが，一方，虚数については，実数とは異なり，大小関係を考えることはしない。実際，どのように大小関係を定義しようとしても，計算とうまく両立するようには定められないことを示すことができる。

確認問題 4　次の計算をせよ。

□(1)　$\dfrac{4+3i}{1-i}$　　□(2)　$\dfrac{5+i}{3-2i}$

ポイント5　$\sqrt{-a}$ を含む計算

$a > 0$ のとき $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i$，特に $\sqrt{-1} = i$ と定める。

例 (1)　$\sqrt{-3}\sqrt{-5} = \sqrt{3}\,i \times \sqrt{5}\,i = \sqrt{15}\,i^2 = -\sqrt{15}$

(2)　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\,i} = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{3}\,i}{\sqrt{3}\,i\sqrt{3}\,i} = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}i$

確認問題 5　次の式を計算せよ。

□(1)　$\sqrt{-9}\sqrt{-4}$　　□(2)　$\sqrt{-27}\sqrt{-6}$　　□(3)　$\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-8}}$　　□(4)　$\dfrac{\sqrt{-6}}{\sqrt{14}}$

練成問題　A

1　次の計算をせよ。　(⇨ ポイント１)

□(1)　$(3+2i)+(1-i)$　　□(2)　$(7+5i)+(-3+8i)$

□(3)　$(11-2i)-(6+3i)$　　□(4)　$(-4+9i)-(2-7i)$

□(5)　$(14+4i)+(-10+5i)$　　□(6)　$(-6-i)+(3+19i)$

□(7)　$(31-5i)-(16+13i)$　　□(8)　$(29+15i)-(37-14i)$

2　次の計算をせよ。　(⇨ ポイント２)

□(1)　$(1+i)(2+3i)$　　□(2)　$(3-2i)(4+i)$

□(3)　$(-2+5i)(7-2i)$　　□(4)　$(-7-4i)(3-5i)$

□(5)　$\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\,i\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\,i\right)$　　□(6)　$\left(1+\sqrt{2}\,i\right)\left(1-\sqrt{3}\,i\right)$

3　次の計算をせよ。　(⇨ ポイント１, ２)

□(1)　$3(2+i)-5(3+2i)$　　□(2)　$(4+i)(1+2i)+(3-2i)(5+i)$

□(3)　$(6-5i)(2+i)-(-2+i)(3-2i)$　　□(4)　$2(1+i)(3+5i)+(1+i)^2(1-2i)$

4　次の複素数の共役複素数を求めよ。　(⇨ ポイント３)

□(1)　$1+i$　　□(2)　$3-5i$　　□(3)　$-6+7i$　　□(4)　$\sqrt{3}-2i$

□(5)　$-i$　　□(6)　$\frac{1}{2}i$　　□(7)　3　　□(8)　1

5　次の計算をせよ。　(⇨ ポイント４)

□(1)　$\dfrac{-3+2i}{2+i}$　　□(2)　$\dfrac{7-i}{1-3i}$　　□(3)　$\dfrac{11-7i}{1+4i}$

6　次の計算をせよ。　(⇨ ポイント５)

□(1)　$\sqrt{-8}\sqrt{-27}$　　□(2)　$\sqrt{-12}\sqrt{-18}$　　□(3)　$\dfrac{\sqrt{-18}}{\sqrt{-6}}$　　□(4)　$\dfrac{\sqrt{-14}}{\sqrt{-12}}$

練成問題　B

1　次の問に答えよ。

□(1)　i^2，i^3，i^4 を求めよ。

□(2)　i^{100}，i^{2001} を求めよ。

2　次の数を簡単にせよ。

□(1)　$\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{6}\,i}{1+\sqrt{2}\,i}$　　□(2)　$\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{10}\,i}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$　　□(3)　$\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i}$

3　a，b，c，d を実数とするとき，次の問に答えよ。

□(1)　複素数 $\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ について次の公式を証明せよ。

$\overline{\alpha\pm\beta}=\overline{\alpha}\pm\overline{\beta}$　（複号同順）

$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$

□(2)　複素数 $\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ について，$\beta\neq0$ のとき，次の公式を証明せよ。

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$$

4□　次のことを証明せよ。

複素数 α について，$\alpha=\overline{\alpha}$ が成り立つ　$\Longleftrightarrow$　α は実数

5□　次のことを証明せよ。

複素数 α に対して，$\alpha+\overline{\alpha}$，$\alpha\overline{\alpha}$ は実数である。

6□　次の問に答えよ。

複素数 $\alpha=a+bi$（ただし a，b は実数とする）の実部を $\mathrm{Re}\alpha$，虚部を $\mathrm{Im}\alpha$ という記号で表す。すなわち

$\mathrm{Re}\alpha=a$，$\mathrm{Im}\alpha=b$

このとき，次の公式を証明せよ。

$$\mathrm{Re}\,\alpha=\frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2},\quad \mathrm{Im}\,\alpha=\frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i}$$

6　2次方程式と判別式

ポイント1　2次方程式の解の公式

a, b, c は実数で，$a \neq 0$ とする。2次方程式

$ax^2 + bx + c = 0$

の解は，つねに

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

で与えられる。ここで，$b^2 - 4ac < 0$ のときは，解は虚数になる。

一般に，方程式の解のうち実数のものを**実数解**，虚数のものを**虚数解**という。

例 (1)　$x^2 - 3x + 5 = 0$ の解は

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-11}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{11}\,i}{2}$$

(2)　$5x^2 + 4x + 1 = 0$ の解は

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5}}{2 \cdot 5} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{10} = \frac{-4 \pm 2i}{10} = \frac{-2 \pm i}{5}$$

確認問題 1　次の2次方程式を解の公式で解け。

□(1)　$x^2 + x - 3 = 0$　　□(2)　$2x^2 + x + 1 = 0$

□(3)　$9x^2 - 6x + 1 = 0$　　□(4)　$x^2 - 2x + 3 = 0$

ポイント2　2次方程式の判別式

a, b, c は実数で，$a \neq 0$ とする。2次方程式

$ax^2 + bx + c = 0$　……　①

に対して，$\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ のことをその**判別式**といい，しばしば記号 D で表す。D の値によって①の解がどのようなものか判別することができる。

$D > 0$　⟺　①は2つの異なる実数解をもつ

$D = 0$　⟺　①はただ1つの実数解（重解）をもつ

$D < 0$　⟺　①は2つの異なる虚数解をもつ

$D = 0$ のときの解は，2つの解が重なったものとみなして**重解**という。また，$D < 0$ のときの2つの虚数解は互いに共役である。

例題　次の2次方程式の解を判別せよ。

(1)　$2x^2 + 5x + 4 = 0$　　(2)　$4x^2 - 12x + 9 = 0$

(解答) (1)　$D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -7 < 0$

2つの異なる虚数解をもつ。

(2)　$D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$

（実数の）重解をもつ。

確認問題 2　次の2次方程式の解を判別せよ。

□(1)　$x^2 + x + 1 = 0$　　□(2)　$3x^2 + 5x + 4 = 0$

□(3)　$2x^2 - 8x + 8 = 0$　　□(4)　$4x^2 + 7x + 2 = 0$

ポイント3　判別式の応用

例題　2次方程式 $x^2 + (a + 3)x + 2a + 3 = 0$ が虚数解をもつとき，実数 a の値の範囲を求めよ。

（解答）　$D = (a + 3)^2 - 4(2a + 3) < 0$ より

$a^2 - 2a - 3 < 0$,　$(a + 1)(a - 3) < 0$

ゆえに　$-1 < a < 3$

確認問題 3　次の問に答えよ。

□(1)　2次方程式 $x^2 + (a + 1)x + a + 4 = 0$ が虚数解をもつとき，実数 a の値の範囲を求めよ。

□(2)　2次方程式 $x^2 + (2a - 4)x + a = 0$ が重解をもつとき，実数 a の値を求めよ。

ポイント4　1次の係数が偶数のときの公式

a，b'，c は実数で，$a \neq 0$ とする。2次方程式

$ax^2 + 2b'x + c = 0$

の解は，

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

またこの方程式の判別式は，$D = 4(b'^2 - ac)$ となるから，D のかわりに

$$\frac{D}{4} = b'^2 - ac$$

を用いて解の判別ができる。

例　(1)　$x^2 - 4x + 1 = 0$ の解は，$x = -(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1} = 2 \pm \sqrt{3}$

$x^2 + 2x + 3 = 0$ の解は，$x = -1 \pm \sqrt{1^2 - 3} = -1 \pm \sqrt{2}\,i$

(2)　$x^2 + 2(a - 2)x + 2a - 1 = 0$ の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4} = (a - 2)^2 - (2a - 1)$$
$$= a^2 - 6a + 5 = (a - 1)(a - 5)$$

したがって，この方程式が重解をもつとき，$a = 1$，5

確認問題 4　次の問に答えよ。

(1)　次の2次方程式を，1次の係数が偶数の場合の解の公式を用いて解け。

□①　$x^2 + 4x + 2 = 0$　　□②　$x^2 + 2x + 5 = 0$

□(2)　次の2次方程式が重解をもつような実数 a の値を求めよ。$\dfrac{D}{4}$ を用いて計算すること。

$x^2 + 2(a + 1)x + a + 7 = 0$

練成問題　A

1　**次の２次方程式を解の公式で解け。**　**(⇨ ポイント１)**

□(1)　$x^2+3x+1=0$　□(2)　$4x^2+3x+1=0$　□(3)　$x^2-10x+25=0$

□(4)　$3x^2-x+1=0$　□(5)　$2x^2-2x+1=0$　□(6)　$5x^2+14x+17=0$

2　**次の２次方程式の解を判別せよ。**　**(⇨ ポイント２)**

□(1)　$x^2-x+2=0$　□(2)　$4x^2+20x+25=0$

□(3)　$5x^2+5x+2=0$　□(4)　$3x^2+7x+3=0$

□(5)　$2x^2+3x+2=0$　□(6)　$x^2+11x+30=0$

3　**次の問に答えよ。**　**(⇨ ポイント３)**

□(1)　２次方程式 $x^2+(a-2)x+a+1=0$ が虚数解をもつとき，実数 a の値の範囲を求めよ。

□(2)　２次方程式 $x^2+(a+3)x+3a+4=0$ が２つの異なる実数解をもつとき，実数 a の値の範囲を求めよ。

□(3)　２次方程式 $x^2+(a-3)x+a+5=0$ が重解をもつとき，実数 a の値を求めよ。

4　**次の２次方程式を，１次の係数が偶数の場合の解の公式を用いて解け。**　**(⇨ ポイント４)**

□(1)　$x^2+2x-5=0$　□(2)　$x^2+4x+7=0$

□(3)　$3x^2+2x-2=0$　□(4)　$5x^2+6x+2=0$

5　**次の問に答えよ。ただし判別式は１次の係数が偶数の場合の $\dfrac{D}{4}$ の公式を用いて計算すること。**

(⇨ ポイント４)

□(1)　２次方程式 $x^2+2(a-1)x+a+5=0$ が重解をもつような実数 a の値を求めよ。

□(2)　２次方程式 $x^2+2ax+a+2=0$ が虚数解をもつような実数 a の値の範囲を求めよ。

練成問題　B

1　**次の２次方程式を解の公式で解け。**

□(1)　$x^2+\sqrt{3}\,x-1=0$　　□(2)　$x^2+\sqrt{5}\,x+2=0$

□(3)　$2x^2-\sqrt{2}\,x-1=0$　　□(4)　$3x^2-2\sqrt{3}\,x+4=0$

2　**次の問に答えよ。**

□(1)　a，b，c が複素数で $a\neq 0$ のとき，２次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の左辺を，$a(x+p)^2+q$ の形に変形（平方完成）せよ。

□(2)　２次方程式の解の公式を証明せよ。

3　**次の問に答えよ。**

□(1)　$\{\pm(1-2i)\}^2=-3-4i$ であることを示せ。

□(2)　次の２次方程式を解け。

$$x^2-3x+3+i=0$$

4　**次の問に答えよ。**

□(1)　２次方程式 $x^2+(a+1)x+a+3=0$ が重解をもつような実数 a の値を求めよ。

□(2)　２次方程式 $x^2-(2a+1)x+3a+1=0$ が虚数解をもつような実数 a の値の範囲を求めよ。

□(3)　２次方程式 $2x^2+(a+5)x+2a+3=0$ が実数解をもつような実数 a の値の範囲を求めよ。

□(4)　２次方程式 $3x^2-(2a+1)x+a^2+3a+2=0$ が重解をもつような実数 a の値を求めよ。

7　解と係数の関係

ポイント1　解と係数の関係

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ の2つの解を α，β とすると，

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha+\beta = -\dfrac{b}{a}} \\ \boldsymbol{\alpha\beta = \dfrac{c}{a}} \end{cases}$$

例 (1)　$x^2+5x+6=0$ の2つの解を α，β とすると，

$\alpha+\beta=-5$，$\alpha\beta=6$

(2)　$2x^2+3x-1=0$ の2つの解を α，β とすると，

$\alpha+\beta=-\dfrac{3}{2}$，$\alpha\beta=-\dfrac{1}{2}$

確認問題 1　次の2次方程式の2つの解を α，β とするとき，$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ の値を求めよ。

□(1)　$x^2+3x-1=0$　　□(2)　$x^2-2x+5=0$

□(3)　$3x^2+x+6=0$　　□(4)　$2x^2-5x+7=0$

ポイント2　解の対称式の値

例　2次方程式 $2x^2+x+3=0$ の2つの解を α，β とすると，

$$\begin{cases} \alpha+\beta = -\dfrac{1}{2} \\ \alpha\beta = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

であるから，

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{3}{2}=-\frac{11}{4}$$

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}=\frac{-\frac{11}{4}}{\frac{3}{2}}=-\frac{11}{6}$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=-\frac{1}{2}\left(-\frac{11}{4}-\frac{3}{2}\right)=\frac{17}{8}$$

確認問題 2　次の問に答えよ。

(1)　2次方程式 $x^2-3x+5=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

□①　$\alpha^2+\beta^2$　　□②　$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

(2)　2次方程式 $x^2+2x-7=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

□①　$\alpha^2+\beta^2$　　□②　$\alpha^3+\beta^3$

ポイント3　与えられた解をもつ2次方程式(1)

α，β を解にもつ2次方程式の1つは，$\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=q$ とすると

$x^2-px+q=0$

例題　$1+\sqrt{2}$，$1-\sqrt{2}$ を解にもつ2次方程式を1つ求めよ。

(解答)　$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$，$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$ より，$x^2-2x-1=0$

確認問題3　次の2数を解にもつ2次方程式を1つ求めよ。

□(1)　$2+\sqrt{3}$，$2-\sqrt{3}$　　□(2)　$-1+i$，$-1-i$　　□(3)　-1，2

ポイント4　与えられた解をもつ2次方程式(2)

例題　2次方程式 $2x^2+3x+4=0$ の2つの解を α，β とおくとき，次の2つの数を2つの解とする2次方程式をそれぞれ求めよ。

(1)　$\alpha+1$，$\beta+1$　　(2)　α^2，β^2　　(3)　$\frac{1}{\alpha}$，$\frac{1}{\beta}$

(解答)　解と係数の関係より $\begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{3}{2}\\ \alpha\beta=\frac{4}{2}=2\end{cases}$

(1)　$(\alpha+1)+(\beta+1)=\alpha+\beta+2=-\frac{3}{2}+2=\frac{1}{2}$

$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=2-\frac{3}{2}+1=\frac{3}{2}$

だから，求める方程式の1つは，$x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=0$ ……（答）

注意　答は $2x^2-x+3=0$ としてもよい。なお，このような2次方程式は，解と係数の関係から考えると，必ず $ax^2-\frac{1}{2}ax+\frac{3}{2}a=0$ $(a\neq 0)$ の形であることがわかる。

(2)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot 2=-\frac{7}{4}$

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=4$

だから，求める方程式の1つは，$x^2+\frac{7}{4}x+4=0$ ……（答）

(3)　$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}$，$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{2}$

だから，求める方程式の1つは，$x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}=0$ ……（答）

確認問題4　次の問に答えよ。

(1)　2次方程式 $x^2+x-7=0$ の2つの解を α，β とおくとき，次の2つの数を2つの解とする2次方程式をそれぞれ1つ求めよ。

□①　$\alpha+1$，$\beta+1$　　□②　α^2，β^2　　□③　$\frac{1}{\alpha}$，$\frac{1}{\beta}$

(2)　2次方程式 $2x^2+3x+6=0$ の2つの解を α，β とおくとき，次の2つの数を2つの解とする2次方程式をそれぞれ1つ求めよ。

□①　$\alpha+3$，$\beta+3$　　□②　α^2+2，β^2+2　　□③　$\frac{1}{\alpha}$，$\frac{1}{\beta}$

練成問題　A

1　**次の２次方程式の２つの解を α，β とするとき，$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ の値を求めよ。**　（⇨ ポイント１）

□(1)　$x^2+5x+2=0$　　□(2)　$x^2+4x-2=0$

□(3)　$2x^2-4x+9=0$　　□(4)　$3x^2+6x+8=0$

□(5)　$7x^2+8x-3=0$　　□(6)　$5x^2+11x+20=0$

2　**次の問に答えよ。**　（⇨ ポイント２）

(1)　２次方程式 $x^2+x-5=0$ の２つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

□①　$\alpha^2+\beta^2$　　□②　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

(2)　２次方程式 $2x^2+4x-3=0$ の２つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

□①　$\alpha^2+\beta^2$　　□②　$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

(3)　２次方程式 $x^2+5x+3=0$ の２つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

□①　$\alpha^2+\beta^2$　　□②　$\alpha^3+\beta^3$

3　**次の２数を解にもつ２次方程式を１つ求めよ。**　（⇨ ポイント３）

□(1)　$1+\sqrt{7}$，$1-\sqrt{7}$　　□(2)　$2+i$，$2-i$　　□(3)　3，5

4　**次の問に答えよ。**　（⇨ ポイント４）

(1)　２次方程式 $x^2+2x+4=0$ の２つの解を α，β とするとき，次の２つの数を２つの解とする２次方程式をそれぞれ１つ求めよ。

□①　$\alpha-1$，$\beta-1$　　□②　α^2-1，β^2-1　　□③　$\dfrac{1}{\alpha-1}$，$\dfrac{1}{\beta-1}$

(2)　２次方程式 $2x^2-7x+2=0$ の２つの解を α，β とするとき，次の２つの数を２つの解とする２次方程式をそれぞれ１つ求めよ。

□①　$\alpha-2$，$\beta-2$　　□②　α^2+1，β^2+1　　□③　$\dfrac{1}{\alpha+1}$，$\dfrac{1}{\beta+1}$

(3)　２次方程式 $3x^2+4x+5=0$ の２つの解を α，β とするとき，次の２つの数を２つの解とする２次方程式をそれぞれ１つ求めよ。

□①　$\alpha+2$，$\beta+2$　　□②　α^2-3，β^2-3　　□③　$\dfrac{1}{\alpha+2}$，$\dfrac{1}{\beta+2}$

練成問題　B

1　**次の問に答えよ。**

(1)　2次方程式 $2x^2+\sqrt{2}\,x+5=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

□①　$\alpha+\beta$　　□②　$\alpha\beta$　　□③　$\alpha^2+\beta^2$

(2)　2次方程式 $x^2-2\sqrt{3}\,x+3\sqrt{5}=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

□①　$\alpha+\beta$　　□②　$\alpha\beta$　　□③　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

(3)　2次方程式 $5x^2-3\sqrt{2}\,x+7=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

□①　$\alpha+\beta$　　□②　$\alpha\beta$　　□③　$\alpha^3+\beta^3$

2　**次の問に答えよ。**

(1)　2次方程式 $x^2+2x+5=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

□①　$\alpha^2+\beta^2$　　□②　$\alpha^3+\beta^3$　　□③　$\alpha^5+\beta^5$

(2)　2次方程式 $2x^2-4x+3=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

□①　$\alpha^2+\beta^2$　　□②　$(\alpha-\beta)^2$　　□③　$\dfrac{\beta^2}{\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{\beta}$

(3)　2次方程式 $2x^2+3x-4=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

□①　$\dfrac{1}{\alpha-1}+\dfrac{1}{\beta-1}$　　□②　$\alpha^4+\beta^4$

3　**次の問に答えよ。**

□(1)　2次方程式 $x^2+3x+5=0$ の2つの解を α，β とするとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ を2つの解とする2次方程式を1つ求めよ。

□(2)　2次方程式 $2x^2-5x+4=0$ の2つの解を α，β とするとき，$2\alpha+\beta$，$\alpha+2\beta$ を2つの解とする2次方程式を1つ求めよ。

□(3)　2次方程式 $x^2+x-1=0$ の2つの解を α，β とするとき，$\alpha^3+\beta$，$\alpha+\beta^3$ を2つの解とする2次方程式を1つ求めよ。