分子 $= b^3(c-a)+(c-a)(c+a)ac$
$-b(c-a)(c^2+ca+a^2)$
$=(c-a)\{b^3+ac(a+c)-b(c^2+ca+a^2)\}$
$=(c-a)\{-a^2(b-c)-ac(b-c)$
$+b(b-c)(b+c)\}$
$=-(c-a)(b-c)\{(a-b)(a+b)+c(a-b)\}$
$=-(c-a)(b-c)(a-b)(a+b+c)$
より 与式 $=-(a+b+c)$

4 複素数〔P 18～P 21〕

◇確認問題〔P 18～P 19〕

1 (1) $\pm\sqrt{2}i$ (2) $\pm\sqrt{5}i$ (3) $\pm 2i$ (4) $\pm 4i$
(5) $\pm 2\sqrt{3}i$ (6) $\pm 3\sqrt{3}i$

2 (1) $\sqrt{6}i$ (2) $\sqrt{15}i$ (3) $2\sqrt{2}i$ (4) $3\sqrt{7}i$
(5) $5i$ (6) i

3 (1)① 実部 1 虚部 1 ② 実部 3 虚部 −5
③ 実部 −4 虚部 3 ④ 実部 0 虚部 2
⑤ 実部 0 虚部 −3 ⑥ 実部 5 虚部 0
(2) 虚数：$5+i$, $7i$, $\sqrt{-3}$ 純虚数：$7i$, $\sqrt{-3}$

4 (1) $x=7$, $y=3$
(2) $x=1$, $y=-2$ $[5x-2=3,\ 3y+4=-2]$

◇練成問題A〔P 20～P 21〕

1 (1) $\pm\sqrt{7}i$ (2) $\pm\sqrt{11}i$ (3) $\pm\sqrt{15}i$ (4) $\pm\sqrt{21}i$
(5) $\pm 3i$ (6) $\pm 7i$ (7) $\pm 2\sqrt{5}i$ (8) $\pm 3\sqrt{5}i$
(9) $\pm 6\sqrt{2}i$ (10) $\pm 2\sqrt{14}i$

2 (1) $\sqrt{2}i$ (2) $\sqrt{14}i$ (3) $3i$ (4) $8i$
(5) $2\sqrt{3}i$ (6) $3\sqrt{2}i$ (7) $5\sqrt{2}i$ (8) $6i$
(9) $2\sqrt{7}i$ (10) $3\sqrt{11}i$ (11) $\frac{\sqrt{2}}{2}i$ (12) $\frac{\sqrt{3}}{2}i$
(13) $\frac{1}{3}i$ (14) $\frac{2\sqrt{7}}{7}i$ (15) $\frac{\sqrt{3}}{6}i$ (16) $\frac{5}{7}i$

3 (1) 実部 −1 虚部 −1 (2) 実部 7 虚部 4
(3) 実部 5 虚部 7 (4) 実部 −3 虚部 8
(5) 実部 − 5 虚部 $\sqrt{2}$ (6) 実部 2 虚部 −1
(7) 実部 12 虚部 1 (8) 実部 −8 虚部 $\sqrt{3}$
(9) 実部 $-\sqrt{2}$ 虚部 $\sqrt{5}$ (10) 実部 0 虚部 1
(11) 実部 0 虚部 6 (12) 実部 0 虚部 −7
(13) 実部 0 虚部 −1 (14) 実部 0 虚部 $-\sqrt{5}$
(15) 実部 12 虚部 0 (16) 実部 1 虚部 0
(17) 実部 −4 虚部 0 (18) 実部 $\sqrt{3}$ 虚部 0

4 虚数：$7-i$, $\sqrt{2}i$, $-1-i$, $\sqrt{-4}$
純虚数：$\sqrt{2}i$, $\sqrt{-4}$

5 (1) $x=3$, $y=-1$ (2) $x=4$, $y=\frac{5}{2}$
(3) $x=3$, $y=3$ (4) $x=-2$, $y=3$
(5) $x=2$, $y=1$ (6) $x=3$, $y=-2$
(7) $x=-\frac{3}{4}$, $y=4$ (8) $x=3$, $y=-\frac{6}{5}$

［解説］
(3) $3x-7=2$, $y+2=5$
(4) $7x+2=-12$, $-y+4=1$
(5) $x+y=3$, $x-y=1$
(6) $3x+2y=5$, $2x+y+1=5$
(7) $4x+3=0$, $2y-8=0$
(8) $3x-9=0$, $5y+6=0$

5 複素数の計算〔P 22～P 25〕

◇確認問題〔P 22～P 23〕

1 (1) $6-i$ (2) $11+6i$ (3) $-4+4i$ (4) $3+9i$
2 (1) $4-2i$ (2) $19+4i$ (3) $17+31i$ (4) $23-7i$
3 (1) $3-5i$ (2) $4+2i$ (3) $-10i$ (4) 6
4 (1) $\frac{1+7i}{2}$ (2) $1+i$

［解説］
(1) (与式) $=\frac{(4+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+7i}{1^2+1^2}$
(2) (与式) $=\frac{(5+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{13+13i}{3^2+2^2}$

5 (1) -6 (2) $-9\sqrt{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{\sqrt{21}}{7}i$

［解説］
(1) $\sqrt{-9}\sqrt{-4}=(3i)(2i)=-6$
(2) $\sqrt{-27}\sqrt{-6}=(3\sqrt{3}i)(\sqrt{6}i)=-9\sqrt{2}$
(3) $\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-8}}=\frac{\sqrt{2}i}{2\sqrt{2}i}=\frac{1}{2}$
(4) $\frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{6}{14}}i=\frac{\sqrt{21}}{7}i$

◇練成問題A〔P 24〕

1 (1) $4+i$ (2) $4+13i$ (3) $5-5i$
(4) $-6+16i$ (5) $4+9i$ (6) $-3+18i$
(7) $15-18i$ (8) $-8+29i$

2 (1) $-1+5i$ (2) $14-5i$ (3) $-4+39i$
(4) $-41+23i$ (5) 7
(6) $1+\sqrt{6}+(\sqrt{2}-\sqrt{3})i$

3 (1) $-9-7i$ (2) $19+2i$
(3) $21-11i$ (4) $18i$

［解説］
(2) $(2+9i)+(17-7i)$
(3) $(17-4i)-(-4+7i)$
(4) $(1+i)^2=1+2i-1=2i$
(与式) $=2(-2+8i)+2i(1-2i)$

4 (1) $1-i$ (2) $3+5i$ (3) $-6-7i$ (4) $\sqrt{3}+2i$
(5) i (6) $-\frac{1}{2}i$ (7) 3 (8) 1

5 (1) $\frac{-4+7i}{5}$ (2) $1+2i$ (3) $-1-3i$

［解説］
(1) (与式) $=\frac{(-3+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{-4+7i}{2^2+1^2}$
(2) (与式) $=\frac{(7-i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\frac{10+20i}{1^2+3^2}$
(3) (与式) $=\frac{(11-7i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)}=\frac{-17-51i}{1^2+4^2}$

6 (1) $-6\sqrt{6}$ (2) $-6\sqrt{6}$ (3) $\sqrt{3}$ (4) $\dfrac{\sqrt{42}}{6}$

◇練成問題B〔P 25〕

1 (1) $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$

(2) $i^{100}=1$, $i^{2001}=i$

$[i^4=1$ より $i^{100}=(i^4)^{25}=1$, $i^{2001}=(i^4)^{500}\cdot i]$

2 (1) $\dfrac{-\sqrt{3}-2\sqrt{6}\,i}{3}$ (2) $\dfrac{8\sqrt{5}+\sqrt{30}\,i}{14}$

(3) $\dfrac{3-\sqrt{2}+(3\sqrt{6}-2\sqrt{3})i}{7}$

［解説］

(1) $(与式)=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{6}\,i)(1-\sqrt{2}\,i)}{(1+\sqrt{2}\,i)(1-\sqrt{2}\,i)}=\dfrac{-\sqrt{3}-2\sqrt{6}\,i}{1^2+(\sqrt{2})^2}$

(2) $(与式)=\dfrac{(\sqrt{15}+\sqrt{10}\,i)(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i)}{(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i)(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i)}$

$=\dfrac{6\sqrt{5}-\sqrt{30}\,i+2\sqrt{30}\,i+2\sqrt{5}}{12+2}$

(3) $(与式)=\dfrac{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i)(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i)}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i)(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i)}$

$(分子)=(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})\sqrt{3}\,i$
$+(1+\sqrt{2})\sqrt{3}\,i+3$

$=2+2\sqrt{6}\,i$

$(与式)=\dfrac{2+2\sqrt{6}\,i}{6+2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{2(3-\sqrt{2})+2\sqrt{6}(3-\sqrt{2})i}{2(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}$

3 (1) $\overline{\alpha\pm\beta}=\overline{(a+bi)\pm(c+di)}=\overline{(a\pm c)+(b\pm d)i}$

$=(a\pm c)-(b\pm d)i$ （複号同順）

$\overline{\alpha}\pm\overline{\beta}=(a-bi)\pm(c-di)=(a\pm c)-(b\pm d)i$

（複号同順）

ゆえに $\overline{\alpha\pm\beta}=\overline{\alpha}\pm\overline{\beta}$

$\overline{\alpha\beta}=\overline{(a+bi)(c+di)}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}$

$=ac-bd-(ad+bc)i$

$\overline{\alpha}\,\overline{\beta}=(a-bi)(c-di)=ac-bd-(ad+bc)i$

ゆえに $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$

(2) $\beta\neq0$ のとき，$\overline{\beta}\neq0$

(1)より $\overline{\beta}\left(\overline{\dfrac{\alpha}{\beta}}\right)=\left(\overline{\beta\cdot\dfrac{\alpha}{\beta}}\right)=\overline{\alpha}$

両辺を $\overline{\beta}$ で割れば $\left(\overline{\dfrac{\alpha}{\beta}}\right)=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

4 $\alpha=a+bi$（a, b は実数）とおく。

$\alpha=\overline{\alpha}\iff a+bi=a-bi\iff 2bi=0\iff b=0$

$b=0$ であることは，$\alpha=a$，すなわち α が実数であることと同値である。

5 $\alpha=a+bi$（a, b は実数）とおくと，

$\alpha+\overline{\alpha}=a+bi+a-bi=2a$

$\alpha\overline{\alpha}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

これらは実数である。

6 $\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}=\dfrac{a+bi+a-bi}{2}=\dfrac{2a}{2}=a=\mathrm{Re}\,\alpha$

$\dfrac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i}=\dfrac{a+bi-(a-bi)}{2i}=\dfrac{2bi}{2i}=b=\mathrm{Im}\,\alpha$

6　2次方程式と判別式〔P 26～P 29〕

◇確認問題〔P 26～P 27〕

1 (1) $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ (2) $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}\,i}{4}$

(3) $x=\dfrac{1}{3}$ (4) $x=1\pm\sqrt{2}\,i$

2 (1) 2つの異なる虚数解 (2) 2つの異なる虚数解

(3) 重解 (4) 2つの異なる実数解

［解説］

(1) $D=1^2-4\cdot1\cdot1=-3$

(2) $D=5^2-4\cdot3\cdot4=-23$

(3) $D=(-8)^2-4\cdot2\cdot8=0$

(4) $D=7^2-4\cdot4\cdot2=17$

3 (1) $-3<a<5$ (2) $a=1$, 4

［解説］

(1) $D=(a+1)^2-4(a+4)<0$ より $a^2-2a-15<0$

(2) $D=(2a-4)^2-4a=0$ より

$4a^2-20a+16=0$, $a^2-5a+4=0$

4 (1)① $x=-2\pm\sqrt{2}$ ② $x=-1\pm2i$

(2) $a=2$, -3

［解説］

(1)① $x=-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot2}$

② $x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot5}$

(2) $\dfrac{D}{4}=(a+1)^2-(a+7)=0$ より，$a^2+a-6=0$

◇練成問題A〔P 28〕

1 (1) $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ (2) $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{7}\,i}{8}$

(3) $x=5$ (4) $x=\dfrac{1\pm\sqrt{11}\,i}{6}$

(5) $x=\dfrac{1\pm i}{2}$ (6) $x=\dfrac{-7\pm6i}{5}$

2 (1) 2つの異なる虚数解 (2) 重解

(3) 2つの異なる虚数解 (4) 2つの異なる実数解

(5) 2つの異なる虚数解 (6) 2つの異なる実数解

［解説］

(1) $D=(-1)^2-4\cdot1\cdot2=-7$

(2) $D=20^2-4\cdot4\cdot25=0$

(3) $D=5^2-4\cdot5\cdot2=-15$

(4) $D=7^2-4\cdot3\cdot3=13$

(5) $D=3^2-4\cdot2\cdot2=-7$

(6) $D=11^2-4\cdot1\cdot30=1$

3 (1) $0<a<8$ (2) $a<-1$, $7<a$ (3) $a=-1$, 11

［解説］

(1) $D=(a-2)^2-4(a+1)<0$ より，$a^2-8a<0$

(2) $D=(a+3)^2-4(3a+4)>0$ より，$a^2-6a-7>0$

(3) $D=(a-3)^2-4(a+5)=0$ より，$a^2-10a-11=0$

4 (1) $x=-1\pm\sqrt{6}$ (2) $x=-2\pm\sqrt{3}\,i$

(3) $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$　　(4) $x=\dfrac{-3\pm i}{5}$

［解説］

(1) $x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-5)}$

(2) $x=-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot7}$

(3) $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-3\cdot(-2)}}{3}$

(4) $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-5\cdot2}}{5}$

5 (1) $a=-1,\ 4$　　(2) $-1<a<2$

［解説］

(1) $\dfrac{D}{4}=(a-1)^2-(a+5)=0$ より，$a^2-3a-4=0$

(2) $\dfrac{D}{4}=a^2-(a+2)<0$ より，$a^2-a-2<0$

◇練成問題Ｂ〔Ｐ 29〕

1 (1) $x=\dfrac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{7}}{2}$　　(2) $x=\dfrac{-\sqrt{5}\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

(3) $x=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{10}}{4}$　　(4) $x=\dfrac{\sqrt{3}\pm3i}{3}$

［解説］

(1) $x=\dfrac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{(\sqrt{3})^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2}$

(2) $x=\dfrac{-\sqrt{5}\pm\sqrt{(\sqrt{5})^2-4\cdot1\cdot2}}{2}$

(3) $x=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{(-\sqrt{2})^2-4\cdot2\cdot(-1)}}{2\cdot2}$

(4) $x=\dfrac{\sqrt{3}\pm\sqrt{(-\sqrt{3})^2-3\cdot4}}{3}$

2 (1) $ax^2+bc+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-a\cdot\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2+c$

$=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

(2) $ax^2+bx+c=0$ のとき，(1)より

$a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a}$，　$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$

$a,\ b,\ c$ が複素数のとき，$\left(\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$

であり，右辺の平方根は $\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ であるから，

$x+\dfrac{b}{2a}=\dfrac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$　ゆえに　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

3 (1) $\{\pm(1-2i)\}^2=(1-2i)^2=1-4i+4i^2=-3-4i$

(2) $x=2-i,\ 1+i$

［解説］

(2) $a,\ b,\ c$ が必ずしも実数とは限らない複素数で，$a\neq0$ のとき，2 乗して b^2-4ac になる複素数の 1 つを $\sqrt{b^2-4ac}$ と書けば，**2**の(1)(2)の計算より

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

は 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解になる。したがって

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(3+i)}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{-3-4i}}{2}$ と書けるが，(1) より $-3-4i=(1-2i)^2$ であるから，

$x=\dfrac{3\pm(1-2i)}{2}=2-i,\ 1+i$

4 (1) $a=1\pm2\sqrt{3}$

(2) $\dfrac{2-\sqrt{7}}{2}<a<\dfrac{2+\sqrt{7}}{2}$

(3) $a\leqq3-2\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2}\leqq a$

(4) $a=\dfrac{-8\pm3\sqrt{2}}{4}$

［解説］

(1) $D=(a+1)^2-4(a+3)=0$ より，$a^2-2a-11=0$

(2) $D=(2a+1)^2-4(3a+1)<0$ より，
$4a^2-8a-3<0$

(3) $D=(a+5)^2-8(2a+3)\geqq0$ より，
$a^2-6a+1\geqq0$

(4) $D=(2a+1)^2-12(a^2+3a+2)=0$ より，
$-8a^2-32a-23=0$

7　解と係数の関係〔Ｐ 30 〜Ｐ 33〕

◇確認問題〔Ｐ 30 〜Ｐ 31〕

1 (1) $\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=-1$

(2) $\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=5$

(3) $\alpha+\beta=-\dfrac{1}{3},\ \alpha\beta=2$

(4) $\alpha+\beta=\dfrac{5}{2},\ \alpha\beta=\dfrac{7}{2}$

2 (1)① -1　　② $-\dfrac{1}{5}$

(2)① 18　　② -50

［解説］

(1) $\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=5$

$\alpha^2+\beta^2=3^2-2\cdot5,\ \dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

(2) $\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-7$

$\alpha^2+\beta^2=(-2)^2-2(-7)$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

3 (1) $x^2-4x+1=0$　　(2) $x^2+2x+2=0$

(3) $x^2-x-2=0$

［解説］

(1) $(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4,\ (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$

(2) $(-1+i)+(-1-i)=-2,\ (-1+i)(-1-i)=2$

(3) $-1+2=1,\ -1\cdot2=-2$

4 (1)① $x^2-x-7=0$

② $x^2-15x+49=0$

③ $x^2-\dfrac{1}{7}x-\dfrac{1}{7}=0$　$(7x^2-x-1=0)$

(2)① $x^2-\dfrac{9}{2}x+\dfrac{15}{2}=0$　$(2x^2-9x+15=0)$

② $x^2-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{11}{2}=0$　$(4x^2-x+22=0)$

③ $x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}=0$　$(6x^2+3x+2=0)$

［解説］

(1) $\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-7$

① $(\alpha+1)+(\beta+1)=\alpha+\beta+2=1$

$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=-7$

② $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=15$

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=49$

③ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{1}{7}$

$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=-\frac{1}{7}$

(2) $\alpha+\beta=-\frac{3}{2},\ \alpha\beta=3$

① $(\alpha+3)+(\beta+3)=\alpha+\beta+6=\frac{9}{2}$

$(\alpha+3)(\beta+3)=\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+9=\frac{15}{2}$

② $\alpha^2+2+\beta^2+2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+4=\frac{1}{4}$

$(\alpha^2+2)(\beta^2+2)=(\alpha\beta)^2+2(\alpha^2+\beta^2)+4$

$=(\alpha\beta)^2+2\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+4=\frac{11}{2}$

③ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{3}$

◇練成問題A〔P 32〕

1 (1) $\alpha+\beta=-5,\ \alpha\beta=2$　(2) $\alpha+\beta=-4,\ \alpha\beta=-2$

(3) $\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\frac{9}{2}$　(4) $\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=\frac{8}{3}$

(5) $\alpha+\beta=-\frac{8}{7},\ \alpha\beta=-\frac{3}{7}$

(6) $\alpha+\beta=-\frac{11}{5},\ \alpha\beta=4$

2 (1)① 11　② $\frac{1}{5}$　(2)① 7　② $-\frac{14}{3}$

(3)① 19　② -80

［解説］

(1) $\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-5$ より，

$\alpha^2+\beta^2=(-1)^2-2(-5),\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

(2) $\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-\frac{3}{2}$ より，

$\alpha^2+\beta^2=(-2)^2-2\left(-\frac{3}{2}\right),\ \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

(3) $\alpha+\beta=-5,\ \alpha\beta=3$ より

$\alpha^2+\beta^2=(-5)^2-2\cdot3$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

3 (1) $x^2-2x-6=0$　(2) $x^2-4x+5=0$

(3) $x^2-8x+15=0$

［解説］

(1) $(1+\sqrt{7})+(1-\sqrt{7})=2$

$(1+\sqrt{7})(1-\sqrt{7})=-6$

(2) $(2+i)+(2-i)=4,\ (2+i)(2-i)=5$

(3) $3+5=8,\ 3\cdot5=15$

4 (1)① $x^2+4x+7=0$

② $x^2+6x+21=0$

③ $x^2+\frac{4}{7}x+\frac{1}{7}=0\ (7x^2+4x+1=0)$

(2)① $x^2+\frac{1}{2}x-2=0\ (2x^2+x-4=0)$

② $x^2-\frac{49}{4}x+\frac{49}{4}=0\ (4x^2-49x+49=0)$

③ $x^2-x+\frac{2}{11}=0\ (11x^2-11x-2=0)$

(3)① $x^2-\frac{8}{3}x+3=0\ (3x^2-8x+9=0)$

② $x^2+\frac{68}{9}x+\frac{148}{9}=0\ (9x^2+68x+148=0)$

③ $x^2-\frac{8}{9}x+\frac{1}{3}=0\ (9x^2-8x+3=0)$

［解説］

(1) $\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=4$

① $(\alpha-1)+(\beta-1)=\alpha+\beta-2=-4$

$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=7$

② $(\alpha^2-1)+(\beta^2-1)=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2=-6$

$(\alpha^2-1)(\beta^2-1)=(\alpha\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)+1$

$=(\alpha\beta)^2-\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+1=21$

③ $\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{\beta-1}=\frac{(\alpha-1)+(\beta-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}$

$=\frac{(\alpha+\beta)-2}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}=-\frac{4}{7}$

$\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{\beta-1}=\frac{1}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}=\frac{1}{7}$

(2) $\alpha+\beta=\frac{7}{2},\ \alpha\beta=1$

① $(\alpha-2)+(\beta-2)=\alpha+\beta-4=-\frac{1}{2}$

$(\alpha-2)(\beta-2)=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4=-2$

② $(\alpha^2+1)+(\beta^2+1)=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2=\frac{49}{4}$

$(\alpha^2+1)(\beta^2+1)=(\alpha\beta)^2+(\alpha^2+\beta^2)+1$

$=(\alpha\beta)^2+\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+1=\frac{49}{4}$

③ $\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}=\frac{(\alpha+\beta)+2}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}=1$

$\frac{1}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{\beta+1}=\frac{1}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}=\frac{2}{11}$

(3) $\alpha+\beta=-\frac{4}{3},\ \alpha\beta=\frac{5}{3}$

① $(\alpha+2)+(\beta+2)=\alpha+\beta+4=\frac{8}{3}$

$(\alpha+2)(\beta+2)=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4=3$

② $(\alpha^2-3)+(\beta^2-3)=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-6=-\frac{68}{9}$

$(\alpha^2-3)(\beta^2-3)=\alpha^2\beta^2-3(\alpha^2+\beta^2)+9$

$=(\alpha\beta)^2-3\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+9=\frac{148}{9}$

③ $\frac{1}{\alpha+2}+\frac{1}{\beta+2}=\frac{(\alpha+\beta)+4}{\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4}=\frac{8}{9}$

$\frac{1}{\alpha+2}\cdot\frac{1}{\beta+2}=\frac{1}{\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4}=\frac{1}{3}$

◇練成問題B〔P 33〕

1 (1)① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　② $\frac{5}{2}$　③ $-\frac{9}{2}$

(2)① $2\sqrt{3}$　② $3\sqrt{5}$　③ $\frac{2\sqrt{15}}{15}$

(3)① $\frac{3\sqrt{2}}{5}$　　② $\frac{7}{5}$　　③ $-\frac{261\sqrt{2}}{125}$

[解説]

(1)③ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\cdot\frac{5}{2}$

(2)③ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}$

(3)③ $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta\}$

$=\frac{3\sqrt{2}}{5}\left\{\left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)^2-3\cdot\frac{7}{5}\right\}$

2 (1)① -6　　② 22　　③ -82

(2)① 1　　② -2　　③ $-\frac{2}{3}$

(3)① -7　　② $\frac{497}{16}$

[解説]

(1) $\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=5$

① $\alpha^2+\beta^2=(-2)^2-2\cdot5$

② $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=-2(-6-5)$

③ $\alpha^5+\beta^5=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^3+\beta^3)-\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$

(2) $\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\frac{3}{2}$

① $\alpha^2+\beta^2=2^2-2\cdot\frac{3}{2}$

② $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=2^2-4\cdot\frac{3}{2}$

③ $\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\alpha^2}{\beta}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}$

$=\frac{1}{\alpha\beta}(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

(3) $\alpha+\beta=-\frac{3}{2},\ \alpha\beta=-2$

① $\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{\beta-1}=\frac{(\beta-1)+(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}$

$=\frac{\alpha+\beta-2}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$

$=\frac{-\frac{3}{2}-2}{-2-\left(-\frac{3}{2}\right)+1}$

② $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$

$=\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}^2-2(\alpha\beta)^2$

3 (1) $x^2+\frac{1}{5}x+1=0$　$(5x^2+x+5=0)$

(2) $x^2-\frac{15}{2}x+\frac{29}{2}=0$　$(2x^2-15x+29=0)$

(3) $x^2+5x+5=0$

[解説]

(1) $\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=5$ より

$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(-3)^2-2\cdot5}{5}$

$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}=1$

(2) $\alpha+\beta=\frac{5}{2},\ \alpha\beta=2$ より

$(2\alpha+\beta)+(\alpha+2\beta)=3(\alpha+\beta)=\frac{15}{2}$

$(2\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)=2\alpha^2+5\alpha\beta+2\beta^2$

$=2(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta$

(3) $\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-1$ より，

$(\alpha^3+\beta)+(\alpha+\beta^3)=\alpha^3+\beta^3+\alpha+\beta$

$=(-1)\cdot\{(-1)^2-3\cdot(-1)\}-1$

$(\alpha^3+\beta)(\alpha+\beta^3)=\alpha^4+\alpha^3\beta^3+\alpha\beta+\beta^4$

$=\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}^2-2(\alpha\beta)^2+(\alpha\beta)^3+\alpha\beta$

8　解と係数の関係の応用〔P 34～P 37〕

◇確認問題〔P 34～P 35〕

1 (1) $\frac{5+\sqrt{17}}{2},\ \frac{5-\sqrt{17}}{2}$　(2) $\frac{-7+\sqrt{57}}{2},\ \frac{-7-\sqrt{57}}{2}$

[解説]

(1) $x^2-5x+2=0$ の2解。

(2) $x^2+7x-2=0$ の2解。

2 (1) $k=1$，解は1と2 ； $k=-\frac{1}{2}$，解は $\frac{1}{2}$ と1

(2) $k=-2$，解は2と3 ； $k=-\frac{1}{3}$，解は $\frac{4}{3}$ と2

[解説]

(1) 2つの解は α，2α とおける。解と係数の関係より

$\alpha+2\alpha=k+2,\ \alpha\cdot2\alpha=k+1$

kを消去して　$2\alpha^2-3\alpha+1=0,\quad \alpha=1,\ \frac{1}{2}$

また　$k=3\alpha-2$

(2) 2つの解は 2α，3α とおける。解と係数の関係より

$2\alpha+3\alpha=-(k-3),\ 2\alpha\cdot3\alpha=-2k+2$

kを消去して　$6\alpha^2-10\alpha+4=0,\quad \alpha=1,\ \frac{2}{3}$

また　$k=-5\alpha+3$

3 (1) $\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

(2) $2\left(x-\frac{3-\sqrt{41}}{4}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{41}}{4}\right)$

(3) $\left(x-\frac{-1-\sqrt{11}\,i}{2}\right)\left(x-\frac{-1+\sqrt{11}\,i}{2}\right)$

4 (1) 有理数の範囲　$(x^2-3)(x^2+3)$

実数の範囲　$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+3)$

複素数の範囲　$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}\,i)(x+\sqrt{3}\,i)$

(2) 有理数の範囲　$(x^2-7)(x^2+1)$

実数の範囲　$(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})(x^2+1)$

複素数の範囲　$(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})(x-i)(x+i)$

◇練成問題A〔P 36〕

1 (1) $\frac{3-\sqrt{7}\,i}{2},\ \frac{3+\sqrt{7}\,i}{2}$　(2) $\frac{-1-\sqrt{33}}{2},\ \frac{-1+\sqrt{33}}{2}$

(3) $\frac{-5-\sqrt{5}}{2},\ \frac{-5+\sqrt{5}}{2}$　(4) $\frac{3-\sqrt{57}}{12},\ \frac{3+\sqrt{57}}{12}$

[解説]