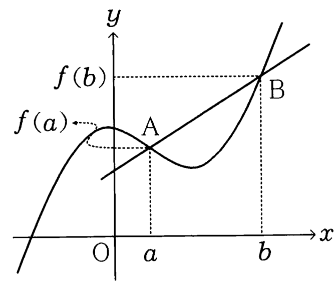
35　微分係数と接線

ポイント1　平均変化率

$y=f(x)$ を関数とする。a，b を実数で $a \neq b$ とするとき，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

のことを，(x が a から b まで変化するときの) $f(x)$ の**平均変化率**という。$y=f(x)$ のグラフをかいたとき，グラフ上の点 $(a,\ f(a))$ を A，点 $(b,\ f(b))$ を B とおけば，平均変化率とは直線 AB の**傾き**のことにほかならない。



例　x の値が 1 から 3 まで変化するとき，$y=x^3$ の平均変化率は $\dfrac{3^3-1^3}{3-1}=\dfrac{26}{2}=13$

確認問題1　x の値が 1 から 3 まで変化するとき，次の関数の平均変化率を求めよ。

□(1)　$y=x^2$　　□(2)　$y=x^2-x$　　□(3)　$y=-x^2+3$

ポイント2　極限

$y=f(x)$ を関数とする。x を a に限りなく近づけるとき，関数の値 $f(x)$ が一定値 c に限りなく近づく（これを「収束する」という）なら，「**x を a に近づけるときの $f(x)$ の極限値は c である**」といい，$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=c$ と書くことにする。

注意　「極限値が存在する」ことを正確に理解することは，とても大切なことである。特に

(i)　x を a に近づけるとき，x を a に一致させてはいけない

(ii)　x を a に近づけるとき，どんな近づけ方をしても同じ値に収束するときに，「極限値が存在する」という

の 2 点は重要である。

$f(x)$ がやさしい関数であれば，「x を a に近づけたときの極限値は，$f(x)$ の a における値と一致する」ことが多い。つまり，$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ となることが多い。この場合,「x を a に近づけるときの $f(x)$ の極限値」は，$f(x)$ の x に a を代入することによって計算できる。$f(x)$ が少々複雑になると，極限値の計算はこのように簡単には行かなくなる。その代表的な例がポイント 3 以下の微分係数である。

例題　$f(x)=2x^2+3x+1$ のとき，次の極限値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to -2} f(x)$

(解答) (1)　$\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=6$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to -2} f(x)=f(-2)=3$

確認問題2　次の問に答えよ。

□(1)　$f(x)=4x^2+x-3$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x)$ を求めよ。

□(2)　$f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+4x+1$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 3} f(x)$ を求めよ。

ポイント3 微分係数の定義

$y = f(x)$ を関数とする。極限値 $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ が存在するとき，この値のことを「$f(x)$ の $x = a$ における**微分係数**または変化率」といい，記号 $f'(a)$ で表す。つまり，微分係数は平均変化率の極限である。微分係数が極限値の 1 つであるということは，微分の最も大切な側面である。

なお，$x - a = h$ とおくと，上の定義の式は $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ となる。$f'(a)$ の計算にはこのほうが便利なこともある。

h は x の値の差（x の変化量）であるから x の**増分**といい，記号 Δx で表すことがある。また分子の $f(a+h) - f(a)$ は y の変化量であるから y の増分といい，記号 Δy で表すことがある。この記号を用いると，微分係数の定義は次のようにも書ける。

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

例題 関数 $f(x) = x^2 - 3x$ の $x = 1$ における微分係数を求めよ。

(解答) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\{(1+h)^2 - 3(1+h)\} - (1-3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + 2h + h^2 - 3 - 3h) - (1-3)}{h}$

$\displaystyle= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - h}{h} = \lim_{h \to 0}(h - 1) = -1$

極限値が存在したので，$f'(1) = -1$ が答である。

確認問題3 次の関数の，(　　) 内における微分係数を求めよ。

□(1) $f(x) = 2x^2 - 3$ $(x = 2)$　　□(2) $f(x) = -x^2 - 6x$ $(x = -1)$

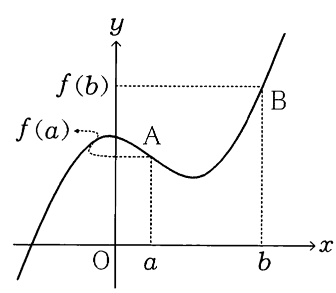
□(3) $f(x) = x^3 + 1$ $(x = -1)$

ポイント4 接線

$y = f(x)$ を関数とし，$f(x)$ の $x = a$ における微分係数が存在するとする。このとき，直線

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

のことを**曲線 $y = f(x)$ の上の点 $(a,\ f(a))$ における接線**という。



注意 曲線 $y = f(x)$ のグラフを考え，その上に点 A$(a,\ f(a))$ をとる。A 以外にこの曲線上に点 B$(b,\ f(b))$ をとれば，直線 AB は，

(i) 必ず A を通る　(ii) 傾きは，a から b の平均変化率である

ここで B を A に限りなく近づけると，微分係数の定義より，(ii)は一定の値に近づくことがわかる。こうして「A を通る，傾き $f'(a)$ の直線」が定まるが，これが点 A で $y = f(x)$ に引いた接線にほかならない。重要なことは，「$f'(a)$ が求まる」ことと，「点 A$(a,\ f(a))$ で $y = f(x)$ に接線が引ける」ことが同値であることである。

例題 $y = x^2 - x$ のグラフに，グラフ上の点 $(-1,\ 2)$ で引いた接線の方程式を求めよ。

(解答) $\displaystyle f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{\{(-1+h)^2 - (-1+h)\} - \{(-1)^2 - (-1)\}}{h} = -3$

求める接線は $(-1,\ 2)$ を通る傾き -3 の直線なので $y - 2 = -3(x + 1)$，つまり　$y = -3x - 1$

確認問題4 $y = 2x^2 + 1$ のグラフに，グラフ上の次の各点で引いた接線の方程式を求めよ。

□(1) $(-1,\ 3)$　　□(2) $(0,\ 1)$　　□(3) $(2,\ 9)$

練成問題　A

1　x の値が -1 から 2 まで変化するとき，次の関数の平均変化率を求めよ。　(⇨ ポイント1)

□(1)　$f(x)=x^3$　　□(2)　$f(x)=-x^2+x$　　□(3)　$f(x)=3x^2-1$

2　$f(x)=x^2$ とする。次の場合の平均変化率を求めよ。　(⇨ ポイント1)

□(1)　x が 2 から 3 まで変化するとき　　□(2)　x が 2 から 2.1 まで変化するとき

□(3)　x が 2 から 2.01 まで変化するとき

3　次の問に答えよ。　(⇨ ポイント2)

(1)　$f(x)=2x-3$ とするとき，次の極限値を求めよ。

□①　$\lim_{x\to 0} f(x)$　　□②　$\lim_{x\to -2} f(x)$

(2)　$f(x)=x^2-x+1$ とするとき，次の極限値を求めよ。

□①　$\lim_{x\to 1} f(x)$　　□②　$\lim_{x\to -2} f(x)$

4　次の関数の，(　　) 内における微分係数を求めよ。　(⇨ ポイント3)

□(1)　$f(x)=3x^2+2x$　$(x=1)$

□(2)　$f(x)=-x^2+3x$　$(x=-1)$

□(3)　$f(x)=3x^2-1$　$(x=2)$

□(4)　$f(x)=x^3+4x$　$(x=3)$

5　$y=2x^2+3x$ のグラフに，グラフ上の次の各点で引いた接線の傾きを求めよ。　(⇨ ポイント4)

□(1)　$(1,\ 5)$　　□(2)　$(0,\ 0)$　　□(3)　$(-2,\ 2)$

6　$y=-2x^3$ のグラフに，グラフ上の次の各点で引いた接線の方程式を求めよ。　(⇨ ポイント4)

□(1)　$(0,\ 0)$　　□(2)　$(1,\ -2)$　　□(3)　$(-2,\ 16)$

練成問題 B

1 x の値が -2 から 0 まで変化するとき，次の関数の平均変化率を求めよ。

□(1) $f(x) = ax^2 + bx + c$　　□(2) $f(x) = 2(x+1)^2$

2 $f(x) = 2x^2 + 2x - 1$ とするとき，次の関数の極限値を求めよ。

□(1) $\lim_{x \to 0} f(x)$　　□(2) $\lim_{x \to 1} \{f(x)\}^2$

□(3) $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$　　□(4) $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

3 次の関数の，(　　) 内における微分係数を求めよ。

□(1) $f(x) = (x+1)(x-3)$ $(x = 1)$　　□(2) $f(x) = (x+3)^2$ $(x = 3)$

□(3) $f(x) = \dfrac{5(x^2+1)}{4}$ $(x = -2)$

4 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数を $f'(a)$ とするとき，次の問に答えよ。

(1) $f(x) = x^2 + x$ のとき，次の a の値を求めよ。

□① $f'(a) = 3$ のとき，a の値　　□② $f'(a) = 0$ のとき，a の値

□③ $f'(a) = -4$ のとき，a の値　　□④ $f'(a) = \dfrac{1}{2}$ のとき，a の値

(2) $f(x) = x^3 + x$ のとき，次の a の値を求めよ。

□① $f'(a) = 1$ のとき，a の値　　□② $f'(a) = 4$ のとき，a の値

5 $f(x) = 2x^2 + 3x$ とする。$y = f(x)$ のグラフの接線が次の条件を満たすとき，その接点の座標と接線の方程式を求めよ。

□(1) $y = f(x)$ のグラフにある点で引いた接線の傾きが 0 である

□(2) $y = f(x)$ のグラフにある点で引いた接線の傾きが -1 である

□(3) $y = f(x)$ のグラフにある点で引いた接線の傾きが 2 である

36 導関数

ポイント1 導関数：関数の微分

$y = f(x)$ を関数とする。x の値 a に対して $f(x)$ の a における微分係数 $f'(a)$ を対応させる関数のことを $f(x)$ の**導関数**といい，$\boldsymbol{f'(x)}$ で表す（$f'(a)$ が存在しないような a に対しては，$f'(x)$ は定義されないものとする）。

$f(x)$ から $f'(x)$ を求めることを $f(x)$ を**微分**するという。

$y = f(x)$ のとき，導関数を表すのに次のような記号も使われる。

$$\boldsymbol{y'},\ \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}},\ \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}\boldsymbol{f(x)}$$

$\dfrac{dy}{dx}$ は，微分係数の定義 $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ で極限値をとったものという意味である。また具体的な式，たとえば $y = x^2 + x + 1$ に対して $(x^2 + x + 1)'$，$\dfrac{d}{dx}(x^2 + x + 1)$ のように書くこともある。

例題 $\boldsymbol{f(x) = x^3}$ **とし，この導関数を** $\boldsymbol{f'(x)}$ **とする。次の値を求めよ。**

(1) $f'(1)$　　(2) $f'(-1)$

(解答) (1) $f'(1)$ は，$f(x) = x^3$ の $x = 1$ における微分係数（前セクションを参照）のことである。

$$\lim_{h \to 0}\frac{(1 + h)^3 - 1}{h} = \lim_{h \to 0}(3 + 3h + h^2) = 3,\quad よって\quad f'(1) = 3$$

(2) $$\lim_{h \to 0}\frac{(-1 + h)^3 - (-1)}{h} = \lim_{h \to 0}(h^2 - 3h + 3) = 3,\quad よって\quad f'(-1) = 3$$

確認問題1 $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x}$ **とし，この導関数を** $\boldsymbol{f'(x)}$ **とする。次の値を求めよ。**

□(1) $f'(1)$　　□(2) $f'(0)$　　□(3) $f'(-2)$

ポイント2 x^n の導関数と導関数の公式

$\boldsymbol{f(x) = x}$ **のとき，** $\boldsymbol{f'(x) = 1}$，$\boldsymbol{f(x) = x^2}$ **のとき，** $\boldsymbol{f'(x) = 2x}$，$\boldsymbol{f(x) = x^3}$ **のとき，** $\boldsymbol{f'(x) = 3x^2}$

$\boldsymbol{f(x) = x^n}$ **のとき，** $\boldsymbol{f'(x) = nx^{n-1}}$ **（n は自然数）**

$\boldsymbol{f(x) = c}$ **（定数）のとき，** $\boldsymbol{f'(x) = 0}$

なお，$f(x) = c$（定数）のような関数を，**定数関数**という。

$g_1(x)$，$g_2(x)$ を関数，c を定数とする。次の公式が成り立つ。

(i) $\boldsymbol{f(x) = g_1(x) + g_2(x)}$ **のとき，** $\boldsymbol{f'(x) = g_1'(x) + g_2'(x)}$

(ii) $\boldsymbol{f(x) = cg_1(x)}$ **のとき，** $\boldsymbol{f'(x) = cg_1'(x)}$

導関数の定義からわかる通り，$f'(x)$ の x に a を代入したものは，「$f(x)$ の a における微分係数」と一致している。したがって，$f(x)$ から $f'(x)$ を直接計算することができれば，（前セクションのようにいちいち極限を考えなくても）任意の点における $f(x)$ の微分係数を容易に求めることができる。

例題1 $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 4x - 2}$ **の導関数を求めよ。**

(解答) $f(x) = (x^2) + (4x - 2)$ と分けると，公式(i)より

$f'(x) = (x^2)' + (4x - 2)'$

さらに，$g(x) = 4x - 2 = (4x) + (-2)$ と分けると，公式(i)，(ii)より，

$g'(x) = (4x)' + (-2)' = 4(x)' - (2)'$

ここに，$(x^2)' = 2x$，$(x)' = 1$，$(2)' = 0$ を代入すると，

$f'(x) = (x^2)' + 4(x)' - (2)' = 2x + 4 \times 1 - 0 = 2x + 4$

例題2　例題 1 の結果を利用して，$x = -1$，1 における $f(x)$ の微分係数を求めよ。

(解答)　$f'(x) = 2x + 4$ に $x = -1$，1 を代入すると，それぞれ

$f'(-1) = 2 \times (-1) + 4 = 2$，$f'(1) = 2 \times 1 + 4 = 6$

が得られる。

確認問題2　次の関数の導関数を求め，その結果を利用して $f'(-1)$，$f(1)$ の値を求めよ。

□(1)　$f(x) = 2x^2 + 6x - 3$　　□(2)　$f(x) = x^3 - 4x^2$

ポイント3　微分の計算

例題　$f(x) = (x - 3)(2x + 1)$ を微分せよ。

(解答)　展開して整理してから微分する。

$f(x) = 2x^2 - 5x - 3$

$f'(x) = 2 \times 2x - 5 \times 1 = 4x - 5$

確認問題3　次の関数を微分せよ。

□(1)　$f(x) = (x + 4)(3x + 1)$　　□(2)　$f(x) = (4x - 1)(x^2 + 3)$

□(3)　$f(x) = (x - 1)^3$

ポイント4　変数について

$y = x^2 + 1$ のような関数の場合，x の値がいろいろに変化するとき，y の値はその x の値に応じて一意的に定まるようになっている。こういうとき，x のことを独立変数，y のことを従属変数と区別することがある。変数の記号にはよく x と y が使われるが，

$t = f(s)$　…　s が独立変数，t が従属変数

$s = f(r)$　…　r が独立変数，s が従属変数

など，状況に応じてさまざまな文字が使われる。微分とは，独立変数が変化するとき，従属変数のほうの変化の具合を調べる方法なので，何が独立変数か正確に把握しておかなくてはならない。このような場合，$\dfrac{dy}{dx}$ のような形の記号が便利である。

例　半径 r の円の面積を $s(r)$ とおくと，$s(r) = \pi r^2$ と書ける。$s(r)$ を変数 r について微分すると，$s'(r) = 2\pi r$ になる。これは $\dfrac{ds}{dr} = 2\pi r$ と書き表すことができる。

確認問題4　次の関数を変数 r について微分せよ。

□(1)　$V(r) = r^3$　　□(2)　$S(r) = \dfrac{5}{36}\pi r^2$

練成問題 A

1 $f(x)=2x^2-5x$ とし，この導関数を $f'(x)$ とする。次の値を求めよ。 (⇨ ポイント１)

□(1) $f'(0)$ □(2) $f'(-2)$ □(3) $f'(3)$

2 次の関数の導関数を求めよ。 (⇨ ポイント２)

□(1) $f(x)=-2x^2-4$ □(2) $f(x)=\frac{2}{3}x^2+x-1$

□(3) $f(x)=x^3-2x+1$ □(4) $f(x)=-\frac{3}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+x$

3 次の関数を微分せよ。 (⇨ ポイント３)

□(1) $f(x)=-(x-1)(x+4)$ □(2) $f(x)=(2x^2+1)(x+1)$

□(3) $f(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)(2x+3)$ □(4) $f(x)=(2x+3)^3$

4 次の値を求めよ。 (⇨ ポイント２，３)

□(1) $f(x)=3x^3-4x+1$ とするとき，$f'(3)$，$f'(1)$ の値

□(2) $f(x)=(4x-3)^2$ とするとき，$f'\left(\frac{1}{2}\right)$，$f'\left(\frac{3}{4}\right)$ の値

□(3) $f(x)=(2x^2+5)(-x+1)$ とするとき，$f'(0)$，$f'(1)$ の値

5 次の関数の導関数を求めよ。 (⇨ ポイント４)

□(1) $v(t)=-t^2+\frac{t}{5}+3$ の t に関する導関数

□(2) $u(s)=(s+1)^3$ の s に関する導関数

□(3) $V(r)=3\pi r^3$ の r に関する導関数

練成問題 B

1 **関数 $y = 3x^2 - 4x + 3$ について，次の問に答えよ。**

□(1) $x = 1$ における y の微分係数を微分係数の定義に基づいて求めよ。

□(2) $y = 3x^2 - 4x + 3$ のグラフ上の点 $(1,\ 2)$ で引いた接線の方程式を求めよ。

□(3) y の x に関する導関数 y' を求めよ。

□(4) y' の $x = 0$，$x = 2$ における値を求めよ。

2 **半径 r の球を考える。この球の体積，表面積をそれぞれ $V(r)$，$S(r)$ とすれば，$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$，$S(r) = 4\pi r^2$ であることが知られている。球の半径 r が変化するとき（r を独立変数とするとき），次の問に答えよ。**

□(1) $V(r)$ の $r = a$ における微分係数を求めよ。

□(2) $S(r)$ の $r = a$ における微分係数を求めよ。

□(3) $V(r)$ の $r = a$ における微分係数が 8π であるとき，a の値を求めよ。

□(4) $S(r)$ の $r = a$ における微分係数が $\frac{\pi}{2}$ であるとき，a の値を求めよ。

3 **関数 $f(x) = 3x^2 - 2x$ を考える。次の問に答えよ。**

□(1) $y = f(x)$ のグラフ上の点（1，1）で引いた接線 l_1 の方程式を求めよ。

□(2) $y = f(x)$ のグラフに引いた接線のうち，傾きが 1 のものの方程式を求めよ。

□(3) $y = f(x)$ のグラフに引いた接線のうち，(2)で求めた接線と直交するものの方程式とその接点の座標を求めよ。

4 **$f(x)$ は x に関する 2 次の多項式とする。次の条件を満たす $f(x)$ を求めよ。**

□(1) $f(0) = 0$，$f'(1) = 3$，$f'(-1) = -1$

□(2) $f(0) = 3$，$f(-1) = 5$，$f'(1) = -1$

37 接線・関数の値の変化

ポイント1 接線の公式

$y=f(x)$ のグラフ上の点 $(a,\ f(a))$ での接線の方程式は

$$\boldsymbol{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$$

例題 **放物線 $y=x^2+x+2$ の接線のうち，傾きが 3 であるものの方程式と，そのときの接点を求めよ。**

(解答) $(x^2+x+2)'=2x+1$

接点を $(a,\ a^2+a+2)$ とおくと，接線の傾きは $2a+1$

$2a+1=3$ より，$a=1$

$a^2+a+2=1^2+1+2=4$ より，接点の座標は $(1,\ 4)$

求める方程式は

$y-4=3(x-1)$，$y=3x+1$

確認問題1 次の関数のグラフの接線のうち，与えられた傾きをもつものの方程式と，そのときの接点を求めよ。

□(1) $y=x^2-3x+5$，傾き -1　　□(2) $y=x^3$，傾き 12

ポイント2 曲線上にない点から引いた接線

例題 **$f(x)=x^2-4x+6$ とする。放物線 $y=f(x)$ の接線のうち，点 $(1,\ -1)$ を通るものの方程式を求めよ。**

(解答) $f'(x)=2x-4$

接点の x 座標を a とおくと，求める接線の方程式は

$y-(a^2-4a+6)=(2a-4)(x-a)$

$y=(2a-4)x-a^2+6$ …… ①

これが $(1,\ -1)$ を通るのだから

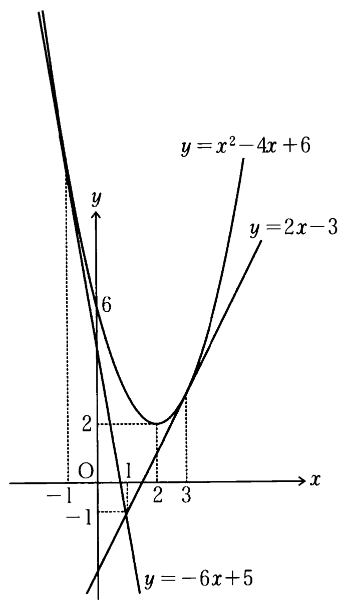
$-1=(2a-4)\cdot 1-a^2+6$

$a^2-2a-3=0$；$(a+1)(a-3)=0$

ゆえに　$a=-1,\ 3$

①に代入して，求める接線は

$y=-6x+5$，$y=2x-3$



確認問題2 次の関数のグラフの接線のうち，与えられた点を通るものの方程式を求めよ。

□(1) $y=x^2+3$，$(2,\ 6)$　　□(2) $y=2x^2-4x+7$，$(-1,\ 5)$

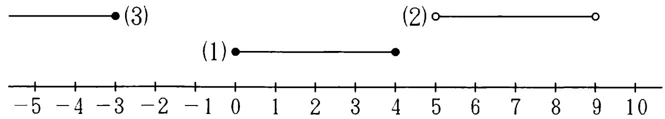
ポイント3　区間

変数 x の動く範囲のうち,

$\{x \mid 0 \leqq x \leqq 4\}$　……　(1)

$\{x \mid 5 < x < 9\}$　……　(2)

$\{x \mid x \leqq -3\}$　……　(3)

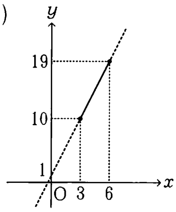


などのように, 数直線の一部のつながった範囲のことを特に**区間**という。特に $a, b\ (a < b)$ を定数とするとき, $\{x \mid a \leqq x \leqq b\}$ の形の区間はよく使われるので, これを $[a,\ b]$ という記号で表すことがある。

例題　**x が次の区間の値をとるとき, y の値のとり得る範囲を求めよ。**

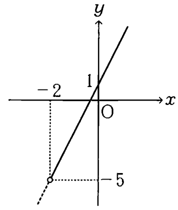
(1)　$y = 3x + 1$, 区間 $[3,\ 6]$　　(2)　$y = 3x + 1$, 区間 $\{x \mid x > -2\}$　　(3)　$y = x^2$, 区間 $[-2,\ 3]$

(解答) (1)



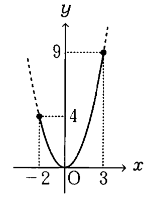
図より　$10 \leqq y \leqq 19$

(2)



図より　$-5 < y$

(3)



図より　$0 \leqq y \leqq 9$

確認問題3　次の問に答えよ。

□(1)　$y = -x + 2$ で x が区間 $[-2,\ 6]$ の値をとるとき, y の値のとり得る範囲を求めよ。

□(2)　$y = x^2$ で x が区間 $[-3,\ 1]$ の値をとるとき, y の値のとり得る範囲を求めよ。

ポイント4　関数の値の増減

$f(x)$ を関数, I をある区間とする。

I に含まれる任意の値 x_1, x_2 について, $x_1 < x_2$ なら $f(x_1) < f(x_2)$

がつねに成り立つとき, $f(x)$ はその区間 I で**単調増加**（あるいは**増加**）であるという。

I に含まれる任意の値 x_1, x_2 について, $x_1 < x_2$ なら $f(x_1) > f(x_2)$

がつねに成り立つとき, $f(x)$ はその区間 I で**単調減少**（あるいは**減少**）であるという。

関数 $f(x)$ の増減は, $f'(x)$ の符号をみることによって調べることができる。

ある区間でつねに $f'(x) > 0$ なら, $f(x)$ はその区間で単調増加

ある区間でつねに $f'(x) < 0$ なら, $f(x)$ はその区間で単調減少

ある区間でつねに $f'(x) = 0$ なら, $f(x)$ はその区間で定数

例題　**$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ の値の増減を, $f'(x)$ の符号を用いて調べよ。**

(解答)　$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-3)(x-1)$

$f'(x) > 0$, すなわち $(x-3)(x-1) > 0$ となるのは

$x > 3$, $x < 1$

$f'(x) < 0$, すなわち $(x-3)(x-1) < 0$ となるのは

$1 < x < 3$

x		1		3	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

(増減表)

$x = 1$, 3 の場合, $f'(x) = 0$ となる。

したがって, 答は「$x > 3$, $x < 1$ で単調増加, $1 < x < 3$ で単調減少」

確認問題4　次の関数の増減を, $f'(x)$ の符号を用いて調べよ。

□(1)　$f(x) = 3x^2 - 4x + 1$　　□(2)　$f(x) = -2x^2 + 6x + 1$

□(3)　$f(x) = x^3 - x^2 - x + 3$　　□(4)　$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x$

練成問題　A

1 次の関数のグラフの接線のうち，与えられた傾きをもつものの方程式と，そのときの接点を求めよ。

(⇨ ポイント１)

□(1)　$y = x^2 + 2x + 7$，傾き 4　　□(2)　$y = x^3 - x$，傾き 2

2 次の関数のグラフの接線のうち，与えられた点を通るものの方程式を求めよ。　(⇨ ポイント２)

□(1)　$y = x^2 + 2x$，$(2,\ 4)$　　□(2)　$y = 3x^2 - x + 1$，$(3,\ 13)$

3 $y = -x + 4$ とする。x が次の区間の値をとるとき，y の値のとり得る範囲を求めよ。　(⇨ ポイント３)

□(1)　$[-2,\ 3]$　　□(2)　$\{x \mid x < -3\}$　　□(3)　$\{x \mid x \geqq -1\}$

4 $y = -x^2 + 2x + 1$ とする。x が次の区間の値をとるとき，y の値のとり得る範囲を求めよ。(⇨ ポイント３)

□(1)　$[3,\ 4]$　　□(2)　$\{x \mid -1 < x \leqq 1\}$　　□(3)　$\{x \mid x \leqq 2\}$

5 次の関数の値の増減を，$f'(x)$ の符号を用いて調べよ。　(⇨ ポイント４)

□(1)　$f(x) = x^2 + 3x$　　□(2)　$f(x) = -2x^2 + 5x - 1$

□(3)　$f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x + 3$　　□(4)　$f(x) = -\dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{x}{2} - 1$

□(5)　$f(x) = \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{1}{5}x + \dfrac{1}{3}$　　□(6)　$f(x) = -\dfrac{x^2}{4} + x + 5$

6 次の関数の値の増減を，$f'(x)$ の符号を用いて調べよ。　(⇨ ポイント４)

□(1)　$f(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - 6x$　　□(2)　$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

□(3)　$f(x) = -x^3 - 3x^2 + 24x + 4$　　□(4)　$f(x) = \dfrac{x^3 + 3x}{2}$

□(5)　$f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{7}{2}x^2 + 12x - 1$　　□(6)　$f(x) = -x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 3x$

□(7)　$f(x) = -x^3 + 3x^2 - \dfrac{9}{4}x + 2$　　□(8)　$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + \dfrac{1}{2}$

練成問題 B

1 $f(x) = -x^2 + ax + b$ について，次の問に答えよ。

□(1) 区間 $x > \frac{1}{2}$ で $f(x)$ は単調減少，区間 $x < \frac{1}{2}$ で$f(x)$ は単調増加となるように，定数 a の値を定めよ。

□(2) さらに $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ となるように，定数 b の値を定めよ。

□(3) (1)，(2)で求めた a，b を用いて，$y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。

2 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx$ について，次の問に答えよ。

□(1) $f'(x) = 3(x^2 - 5x + 4)$ となるように，定数 a，b の値を定めよ。

□(2) (1)で求めた a，b に対して$f(x)$ が単調減少になる x の区間の長さを求めよ。

3□ $f(x) = -x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$ について，$f(x)$ が $x > 4$ で単調減少，$-1 < x < 4$ で単調増加，$x < -1$ で単調減少，$f(4) = 0$ となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

4 $f(x) = x^2 + 5x - 7$ とする。グラフ上の点（x，$f(x)$）における接線を考える。このとき次の問に答えよ。

□(1) 接線の傾きが 3 となるような x の値を求めよ。

□(2) 接線の傾きが 2 より大きくなるための x の条件を求めよ。

5□ $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$ とする。グラフ上の点（x，$f(x)$）における接線を考える。このとき接線の傾きが 4 以下になるための x の条件を求めよ。

6 関数 $f(x) = x^3 + x^2$ について，次の問に答えよ。

□(1) グラフ上の点 $(1,\ f(1))$ における接線の方程式を求めよ。

□(2) グラフ上の点 $(1,\ f(1))$ を通り，他の点で $y = f(x)$ のグラフに接する直線の方程式を求めよ。

□(3) 点 $(2,\ 3)$ を通る接線の方程式を求めよ。