35　微分係数と接線〔P 182～P 185〕

◇確認問題〔P 182～P 183〕

1 (1)　4　　(2)　3　　(3)　-4

[解説]

(1)　$\dfrac{3^2-1^2}{3-1}$

(2)　$\dfrac{(3^2-3)-(1^2-1)}{3-1}$

(3)　$\dfrac{(-3^2+3)-(-1^2+3)}{3-1}$

2 (1)　0　　(2)　$\dfrac{17}{2}$

[解説]

(1)　$\lim_{x\to-1} f(x)=f(-1)=4(-1)^2+(-1)-3$

(2)　$\lim_{x\to3} f(x)=f(3)=-\dfrac{1}{2}\times3^2+4\times3+1$

3 (1)　8　　(2)　-4　　(3)　3

[解説]

(1)　$\lim_{h\to0}\dfrac{\{2(2+h)^2-3\}-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}(2h+8)=8$

(2)　$\lim_{h\to0}\dfrac{\{-(-1+h)^2-6(-1+h)\}-f(-1)}{h}$
$=\lim_{h\to0}(-h-4)=-4$

(3)　$\lim_{h\to0}\dfrac{\{(-1+h)^3+1\}-f(-1)}{h}=\lim_{h\to0}(h^2-3h+3)$
$=3$

4 (1)　$y=-4x-1$　　(2)　$y=1$　　(3)　$y=8x-7$

[解説]

(1)　$f'(-1)=\lim_{h\to0}\dfrac{\{2(-1+h)^2+1\}-\{2(-1)^2+1\}}{h}$
$=-4$

よって求める接線は点$(-1,\ 3)$を通り，傾き-4の直線。

(2)　$f'(0)=\lim_{h\to0}\dfrac{\{2h^2+1\}-1}{h}=0$

よって求める接線は点$(0,\ 1)$を通り，傾き0の直線。

(3)　$f'(2)=\lim_{h\to0}\dfrac{\{2(2+h)^2+1\}-\{2\cdot2^2+1\}}{h}=8$

よって求める接線は点$(2,\ 9)$を通り，傾き8の直線。

◇練成問題A〔P 184〕

1 (1)　3　　(2)　0　　(3)　3

[解説]

(1)　$\dfrac{2^3-(-1)^3}{2-(-1)}$

(2)　$\dfrac{(-2^2+2)-\{-(-1)^2+(-1)\}}{2-(-1)}$

(3)　$\dfrac{(3\cdot2^2-1)-\{3(-1)^2-1\}}{2-(-1)}$

2 (1)　5　　(2)　4.1　　(3)　4.01

[解説]

(1)　$\dfrac{3^2-2^2}{3-2}$　　(2)　$\dfrac{(2.1)^2-2^2}{2.1-2}$　　(3)　$\dfrac{(2.01)^2-2^2}{2.01-2}$

3 (1)①　-3　②　-7　　(2)①　1　②　7

[解説]

(1)①　$\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$　　②　$\lim_{x\to-2} f(x)=f(-2)$

(2)①　$\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$　　②　$\lim_{x\to-2} f(x)=f(-2)$

4 (1)　8　　(2)　5　　(3)　12　　(4)　31

[解説]

(1)　$\lim_{h\to0}\dfrac{\{3(1+h)^2+2(1+h)\}-\{3\times1^2+2\times1\}}{h}$
$=\lim_{h\to0}(3h+8)$

(2)　$\lim_{h\to0}\dfrac{\{-(-1+h)^2+3(-1+h)\}-\{-(-1)^2+3(-1)\}}{h}$
$=\lim_{h\to0}(-h+5)$

(3)　$\lim_{h\to0}\dfrac{\{3\times(2+h)^2-1\}-\{3\times2^2-1\}}{h}$
$=\lim_{h\to0}(3h+12)$

(4)　$\lim_{h\to0}\dfrac{\{(3+h)^3+4(3+h)\}-\{3^3+4\times3\}}{h}$
$=\lim_{h\to0}(h^2+9h+31)$

5 (1)　7　　(2)　3　　(3)　-5

[解説]

(1)　$\lim_{h\to0}\dfrac{\{2(1+h)^2+3(1+h)\}-\{2\cdot1^2+3\cdot1\}}{h}=7$

(2)　$\lim_{h\to0}\dfrac{(2h^2+3h)-0}{h}=3$

(3)　$\lim_{h\to0}\dfrac{\{2(-2+h)^2+3(-2+h)\}-\{2(-2)^2+3(-2)\}}{h}$
$=-5$

6 (1)　$y=0$　　(2)　$y=-6x+4$
(3)　$y=-24x-32$

[解説]

(1)　$\lim_{h\to0}\dfrac{-2h^3-0}{h}=0$

よって求める接線は原点を通り，傾き0の直線。

(2)　$\lim_{h\to0}\dfrac{\{-2(1+h)^3\}-\{(-2)\times1^3\}}{h}=-6$

よって求める接線は点$(1,\ -2)$を通り，傾き-6の直線。

(3)　$\lim_{h\to0}\dfrac{\{-2(-2+h)^3\}-\{(-2)\times(-2)^3\}}{h}=-24$

よって求める接線は点$(-2,\ 16)$を通り，傾き-24の直線。

◇練成問題B〔P 185〕

1 (1)　$-2a+b$　　(2)　0

[解説]

(1)　$\dfrac{\{a\times0^2+b\times0+c\}-\{a(-2)^2+b(-2)+c\}}{0-(-2)}$

(2)　$f(x)=2x^2+4x+2$

$\dfrac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}=\dfrac{2-\{2(-2)^2+4(-2)+2\}}{2}$

2 (1)　-1　　(2)　9　　(3)　2　　(4)　10

[解説]

(1)　$\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$

(2)　$\lim_{x\to1}\{f(x)\}^2=\{f(1)\}^2$

(3)　$\lim_{h\to0}\dfrac{2h^2+2h-1-(-1)}{h}=\lim_{h\to0}(2h+2)$

(4) 与式で $x = 2 + h$ とおくと，

$$与式 = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{(2+h)-2}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\{2(2+h)^2+2(2+h)-1\}-11}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2h^2+10h}{h} = \lim_{h\to 0}(2h+10)$$

3 (1) 0　(2) 12　(3) -5

[解説]

(1) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\{(1+h)^2-2(1+h)-3\}-(-4)}{h} = \lim_{h\to 0} h$$

(2) $f(x) = x^2 + 6x + 9$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\{(3+h)^2+6(3+h)+9\}-36}{h} = \lim_{h\to 0}(h+12)$$

(3) $f(x) = \frac{5}{4}x^2 + \frac{5}{4}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left\{\frac{5}{4}(-2+h)^2+\frac{5}{4}\right\}-\left(5+\frac{5}{4}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{5}{4}h-5\right)$$

4 (1)① $a=1$　② $a=-\frac{1}{2}$　③ $a=-\frac{5}{2}$　④ $a=-\frac{1}{4}$

(2)① $a=0$　② $a=\pm 1$

[解説]

(1) $$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{\{(a+h)^2+(a+h)\}-(a^2+a)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(h+2a+1) = 2a+1$$

① $2a+1=3$

② $2a+1=0$

③ $2a+1=-4$

④ $2a+1=\frac{1}{2}$

(2) $$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{\{(a+h)^3+(a+h)\}-(a^3+a)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(h^2+3ah+3a^2+1) = 3a^2+1$$

① $3a^2+1=1$

② $3a^2+1=4$

5 (1) 接点：$\left(-\frac{3}{4},\ -\frac{9}{8}\right)$，接線：$y=-\frac{9}{8}$

(2) 接点：$(-1,\ -1)$，接線：$y=-x-2$

(3) 接点：$\left(-\frac{1}{4},\ -\frac{5}{8}\right)$，接線：$y=2x-\frac{1}{8}$

[解説]

a を実数とする。

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{\{2(a+h)^2+3(a+h)\}-(2a^2+3a)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(2h+4a+3) = 4a+3$$

(1) $4a+3=0$ より　$a=-\frac{3}{4}$

$f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{8}$

よって接点は $\left(-\frac{3}{4},\ -\frac{9}{8}\right)$

接線はこの点を通り，傾き 0 の直線。

(2) $4a+3=-1$ より　$a=-1$

$f(-1)=-1$

よって接点は $(-1,\ -1)$。接線はこの点を通り，傾き -1 の直線。

(3) $4a+3=0$ より　$a=-\frac{1}{4}$

$f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{8}$

よって接点は $\left(-\frac{1}{4},\ -\frac{5}{8}\right)$。接線はこの点を通り，傾き 2 の直線。

36　導関数〔P 186～P 189〕

◇確認問題〔P 186～P 187〕

1 (1) 0　(2) -3　(3) 9

[解説]

(1) $$\lim_{h\to 0}\frac{\{(1+h)^3-3(1+h)\}-(1-3)}{h} = \lim_{h\to 0}(h^2+3h)$$

(2) $$\lim_{h\to 0}\frac{(h^3-3h)-0}{h} = \lim_{h\to 0}(h^2-3)$$

(3) $$\lim_{h\to 0}\frac{\{(-2+h)^3-3(-2+h)\}-\{-8-3(-2)\}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(h^2-6h+9)$$

2 (1) $f'(x)=4x+6$；$f'(-1)=2$，$f'(1)=10$

(2) $f'(x)=3x^2-8x$；$f'(-1)=11$，$f'(1)=-5$

[解説]

(1) $f'(x) = 2(x^2)' + 6(x)' + (-3)' = 2\times(2x) + 6\times 1$

(2) $f'(x) = (x^3)' - 4(x^2)' = 3x^2 - 4\times(2x)$

3 (1) $6x+13$　(2) $12x^2-2x+12$

(3) $3x^2-6x+3$

[解説]

(1) $f(x)=3x^2+13x+4$，$f'(x)=3\cdot 2x+13$

(2) $f(x)=4x^3-x^2+12x-3$，$f'(x)=4\cdot 3x^2-2x+12$

(3) $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$，$f'(x)=3x^2-3\cdot 2x+3$

4 (1) $V'(r)=3r^2$　(2) $S'(r)=\frac{5}{18}\pi r$

◇練成問題A〔P 188〕

1 (1) -5　(2) -13　(3) 7

[解説]

(1) $$\lim_{h\to 0}\frac{(2h^2-5h)-0}{h} = \lim_{h\to 0}(2h-5)$$

(2) $$\lim_{h\to 0}\frac{\{2(-2+h)^2-5(-2+h)\}-\{2(-2)^2-5(-2)\}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(2h-13)$$

(3) $$\lim_{h\to 0}\frac{\{2(3+h)^2-5(3+h)\}-(2\cdot 3^2-5\cdot 3)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(2h+7)$$

2 (1) $f'(x)=-4x$　(2) $f'(x)=\frac{4}{3}x+1$

(3) $f'(x)=3x^2-2$　(4) $f'(x)=-\frac{9}{4}x^2-x+1$

[解説]

(1) $f'(x) = -2(x^2)' = (-2)\times(2x)$

(2) $f'(x) = \frac{2}{3}(x^2)' + (x)' = \frac{2}{3}\times(2x)+1$

(3) $f'(x) = (x^3)' - 2(x)' = 3x^2 - 2$

(4) $f'(x) = -\frac{3}{4}(x^3)' - \frac{1}{2}(x^2)' + (x)'$

$= \left(-\frac{3}{4}\right) \times (3x^2) - \frac{1}{2} \times (2x) + 1$

3 (1) $f'(x) = -2x - 3$　(2) $f'(x) = 6x^2 + 4x + 1$

(3) $f'(x) = 3x^2 + 3x - 2$　(4) $f'(x) = 24x^2 + 72x + 54$

［解説］

(1) $f(x) = -(x^2 + 3x - 4) = -x^2 - 3x + 4$

(2) $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + x + 1$

$f'(x) = 2 \times 3x^2 + 2 \times 2x + 1$

(3) $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x - 3$

$f'(x) = 3x^2 + \frac{3}{2} \times 2x - 2$

(4) $f(x) = 8x^3 + 3 \times 4x^2 \times 3 + 3 \times 2x \times 9 + 27$

$f'(x) = 8 \times 3x^2 + 36 \times 2x + 54$

4 (1) $f'(3) = 77$，$f'(1) = 5$

(2) $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -8$，$f'\left(\frac{3}{4}\right) = 0$

(3) $f'(0) = -5$，$f'(1) = -7$

［解説］

(1) $f'(x) = 9x^2 - 4$である。ここに$x = 3, x = 1$を代入する。

(2) $f(x) = 16x^2 - 24x + 9$，$f'(x) = 16 \times 2x - 24$

(3) $f(x) = -2x^3 + 2x^2 - 5x + 5$

$f'(x) = -2 \times 3x^2 + 2 \times 2x - 5$

5 (1) $v'(t) = -2t + \frac{1}{5}$　(2) $u'(s) = 3s^2 + 6s + 3$

(3) $V'(r) = 9\pi r^2$

［解説］

(2) $u(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$，$u'(s) = 3s^2 + 3 \times 2s + 3$

◇練成問題B〔P 189〕

1 (1) 2　(2) $y = 2x$　(3) $y' = 6x - 4$

(4) $x = 0$のとき-4，$x = 2$のとき 8

［解説］

(1) $\lim_{h \to 0} \frac{\{3(1+h)^2 - 4(1+h) + 3\} - \{3 - 4 + 3\}}{h}$

$= \lim_{h \to 0}(3h + 2)$

(2) 点 (1，2) を通り，傾き 2 の直線が求めるものなので，

$y - 2 = 2(x - 1)$

(4) y'の式に$x = 0$，2 を代入する。

2 (1) $V'(a) = 4\pi a^2$　(2) $S'(a) = 8\pi a$

(3) $a = \sqrt{2}$　(4) $a = \frac{1}{16}$

［解説］

(1) $V'(r) = \frac{4}{3}\pi(r^3)' = \frac{4}{3}\pi \times 3r^2 = 4\pi r^2$

ここに$r = a$を代入する。

(2) $S'(r) = 4\pi(r^2)' = 8\pi r$

ここに$r = a$を代入する。

(3) $4\pi a^2 = 8\pi$ より　$a^2 = 2$

これを解くと $a = \pm\sqrt{2}$ だが，aは球の半径なので

$a > 0$ である。よって $a = \sqrt{2}$ となる。

(4) $8\pi a = \frac{\pi}{2}$ より $a = \frac{1}{16}$ が得られる。

3 (1) $y = 4x - 3$　(2) $y = x - \frac{3}{4}$

(3) 接線：$y = -x - \frac{1}{12}$，接点：$\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{4}\right)$

［解説］

(1) $f'(x) = 6x - 2$

$f'(1) = 4$

よって求める接線は点 (1，1) を通り，傾き 4 の直線である。

(2) 接点のx座標をaとすれば，$f'(a) = 1$

これを解くと　$a = \frac{1}{2}$

このとき　$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$

よって求める接線は点 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ を通り，傾き 1 の直線である。

$y + \frac{1}{4} = x - \frac{1}{2}$

(3) (2)で求めた接線の傾きは 1 だったので，求める接線の傾きは-1である。(2)と同じく$f'(a) = -1$を解いて

$a = \frac{1}{6}$，$f\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{4}$

よって求める接線は点 $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{4}\right)$ を通り，傾き -1の直線である。

4 (1) $f(x) = x^2 + x$　(2) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 3$

［解説］

$f(x) = ax^2 + bx + c$とおく。すると$f'(x) = 2ax + b$である。

(1) $f(0) = 0$ より　$c = 0$　…… ①

$f'(1) = 3$ より　$2a + b = 3$　…… ②

$f'(-1) = -1$ より　$-2a + b = -1$　…… ③

②と③より $b = 1$，$a = 1$が得られる。

(2) $f(0) = 3$ より　$c = 3$　…… ①

$f(-1) = 5$ より　$a - b + c = 5$　…… ②

$f'(1) = -1$ より　$2a + b = -1$　…… ③

①と②より　$a - b = 2$

これと③より　$a = \frac{1}{3}$，$b = -\frac{5}{3}$

37　接線・関数の値の変化〔P 190～P 193〕

◇確認問題〔P 190～P 191〕

1 (1) $y = -x + 4$，接点 (1，3)

(2) $y = 12x - 16$，接点 (2，8) または

$y = 12x + 16$，接点 (−2，−8)

［解説］

(1) $y' = 2x - 3$

接点を$(a, a^2 - 3a + 5)$とおくと，接線の傾きは$2a - 3$

$2a - 3 = -1$ より，$a = 1$

接点は (1，3)

求める接線は　$y - 3 = -1 \cdot (x - 1)$

(2) $y' = 3x^2$

接点を (a, a^3) とおくと，接線の傾きは $3a^2$

$3a^2 = 12$ より，$a^2 = 4$，　$a = \pm 2$

(i) $a = 2$ のとき

接点は (2，8)，求める接線は

$y - 8 = 12(x - 2)$

(ii) $a = -2$ のとき

接点は $(-2,\ -8)$，求める接線は

$y - (-8) = 12\{x - (-2)\}$

2 (1) $y = 2x + 2,\ y = 6x - 6$

(2) $y = -16x - 11,\ y = 5$

[解説]

(1) $y' = 2x$

接点の x 座標を a とおくと，求める接線は

$y - (a^2 + 3) = 2a(x - a)$

$y = 2ax - a^2 + 3$ …… ①

これが $(2,\ 6)$ を通るから

$6 = 2a \cdot 2 - a^2 + 3$

$a^2 - 4a + 3 = 0$；$(a - 1)(a - 3) = 0$

ゆえに　$a = 1,\ 3$

①に代入して，求める接線は

$y = 2x + 2,\ y = 6x - 6$

(2) $y' = 4x - 4$

接点の x 座標を a とおくと，求める接線は

$y - (2a^2 - 4a + 7) = (4a - 4)(x - a)$

$y = (4a - 4)x - 2a^2 + 7$ …… ①

これが $(-1,\ 5)$ を通るから

$5 = (4a - 4)(-1) - 2a^2 + 7$

$2a^2 + 4a - 6 = 0$

$a^2 + 2a - 3 = 0$；$(a + 3)(a - 1) = 0$

ゆえに　$a = -3,\ 1$

①に代入して，求める接線は

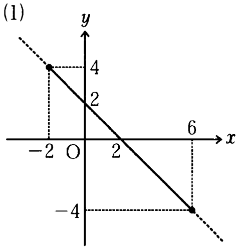
$y = -16x - 11,\quad y = 5$

3 (1) $-4 \leqq y \leqq 4$　　(2) $0 \leqq y \leqq 9$

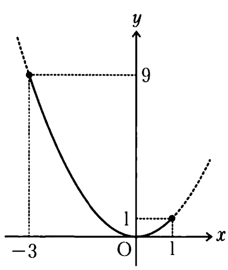
[解説]

下のグラフになる。

(1)



(2)



4 (1) $x > \frac{2}{3}$ で単調増加，$x < \frac{2}{3}$ で単調減少

(2) $x > \frac{3}{2}$ で単調減少，$x < \frac{3}{2}$ で単調増加

(3) $x > 1,\ x < -\frac{1}{3}$ で単調増加，$-\frac{1}{3} < x < 1$ で単調減少

(4) $x > 1,\ x < \frac{1}{3}$ で単調減少，$\frac{1}{3} < x < 1$ で単調増加

[解説]

(1) $f'(x) = 6x - 4 = 6\left(x - \frac{2}{3}\right)$

(2) $f'(x) = -4x + 6 = -4\left(x - \frac{3}{2}\right)$

(3) $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x + 1)(x - 1)$

(4) $f'(x) = -3x^2 + 4x - 1 = -(3x - 1)(x - 1)$

◇練成問題Ａ〔Ｐ 192〕

1 (1) $y = 4x + 6$，接点 $(1,\ 10)$

(2) $y = 2x - 2$，接点 $(1,\ 0)$ または $y = 2x + 2$，接点 $(-1,\ 0)$

[解説]

(1) $y' = 2x + 2$

接点を $(a,\ a^2 + 2a + 7)$ とおくと，接線の傾きは $2a + 2$

$2a + 2 = 4$ より，$a = 1$

接点は $(1,\ 10)$

求める接線は　$y - 10 = 4(x - 1)$

(2) $y' = 3x^2 - 1$

接点を $(a,\ a^3 - a)$ とおくと，接線の傾きは $3a^2 - 1$

$3a^2 - 1 = 2$ より，$3a^2 = 3,\quad a = \pm 1$

(i) $a = 1$ のとき

接点は $(1,\ 0)$，求める接線は

$y - 0 = 2(x - 1)$

(ii) $a = -1$ のとき

接点は $(-1,\ 0)$，求める接線は

$y - 0 = 2\{x - (-1)\}$

2 (1) $y = 2x,\ y = 10x - 16$

(2) $y = 5x - 2,\ y = 29x - 74$

[解説]

(1) $y' = 2x + 2$

接点の x 座標を a とおくと，求める接線は

$y - (a^2 + 2a) = (2a + 2)(x - a)$

$y = (2a + 2)x - a^2$ …… ①

これが $(2,\ 4)$ を通るから

$4 = (2a + 2) \cdot 2 - a^2$

$a^2 - 4a = 0$；$a(a - 4) = 0$

ゆえに　$a = 0,\ 4$

①に代入して，求める接線は

$y = 2x,\ y = 10x - 16$

(2) $y' = 6x - 1$

接点の x 座標を a とおくと，求める接線は

$y - (3a^2 - a + 1) = (6a - 1)(x - a)$

$y = (6a - 1)x - 3a^2 + 1$ …… ①

これが $(3,\ 13)$ を通るから

$13 = (6a - 1) \cdot 3 - 3a^2 + 1$

$3a^2 - 18a + 15 = 0$

$a^2 - 6a + 5 = 0$；$(a - 1)(a - 5) = 0$

ゆえに　$a = 1,\ 5$

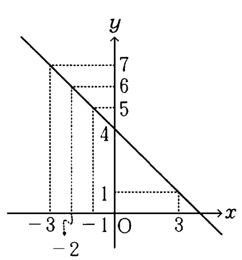
①に代入して，求める接線は

$y = 5x - 2,\ y = 29x - 74$

3 (1) $1 \leqq y \leqq 6$　　(2) $y > 7$　　(3) $y \leqq 5$

[解説]

右のグラフになる。



4 (1) $-7 \leqq y \leqq -2$ (2) $-2 < y \leqq 2$ (3) $y \leqq 2$

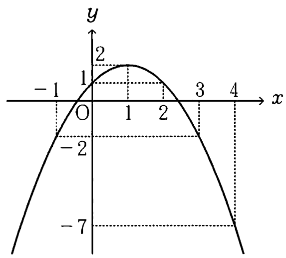
[解説]

右のグラフになる。

$y = -x^2 + 2x + 1$

$= -(x-1)^2 + 2$

これは $(1,\ 2)$ を頂点とする，下に開いた放物線である。



5 (1) $x > -\frac{3}{2}$ で単調増加，$x < -\frac{3}{2}$ で単調減少

(2) $x > \frac{5}{4}$ で単調減少，$x < \frac{5}{4}$ で単調増加

(3) $x > 1$ で単調増加，$x < 1$ で単調減少

(4) $x > \frac{1}{3}$ で単調減少，$x < \frac{1}{3}$ で単調増加

(5) $x > -\frac{3}{20}$ で単調増加，$x < -\frac{3}{20}$ で単調減少

(6) $x > 2$ で単調減少，$x < 2$ で単調増加

[解説]

(1) $f'(x) = 2x + 3$ (2) $f'(x) = -4x + 5$

(3) $f'(x) = x - 1$ (4) $f'(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

(5) $f'(x) = \frac{4}{3}x + \frac{1}{5}$ (6) $f'(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

6 (1) $x > 2$，$x < -1$ で単調増加，$-1 < x < 2$ で単調減少

(2) $x > 3$，$x < 1$ で単調増加，$1 < x < 3$ で単調減少

(3) $x > 2$，$x < -4$ で単調減少，$-4 < x < 2$ で単調増加

(4) 全区間で単調増加

(5) $x > 4$，$x < 3$ で単調増加，$3 < x < 4$ で単調減少

(6) 全区間で単調減少

(7) $x > \frac{3}{2}$，$x < \frac{1}{2}$ で単調減少，$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ で単調増加

(8) 全区間で単調増加

[解説]

(1) $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x-2)(x+1)$

(2) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-3)(x-1)$

(3) $f'(x) = -3x^2 - 6x + 24 = -3(x+4)(x-2)$

(4) $f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2 + 3) = \frac{3}{2}(x^2 + 1)$

(5) $f'(x) = x^2 - 7x + 12 = (x-4)(x-3)$

(6) $f'(x) = -3x^2 + 3x - 3 = -3(x^2 - x + 1)$

$= -3\left\{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right\}$

(7) $f'(x) = -3x^2 + 6x - \frac{9}{4} = -3\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$

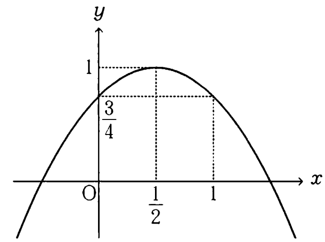
(8) $f'(x) = 6x^2 - 6x + 2 = 6\left(x^2 - x + \frac{1}{3}\right)$

$= 6\left\{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\right\}$

◇練成問題Ｂ（Ｐ 193）

1 (1) $a = 1$ (2) $b = \frac{3}{4}$

(3)



[解説]

(1) $f'(x) = -2x + a$

一方，条件より $f'(x) = c\left(x - \frac{1}{2}\right)$，$c < 0$ と書ける。

(2) $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + b = 1$ より $b = \frac{3}{4}$

(3) $f(x) = -x^2 + x + \frac{3}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$ である。

2 (1) $a = -\frac{5}{2}$，$b = 4$ (2) 3

[解説]

(1) $f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3b = 3(x^2 + 2ax + b)$

$= 3(x^2 - 5x + 4)$

ゆえに $2a = -5$，$b = 4$

(2) $f'(x) = 3(x-4)(x-1)$ より，$f(x)$ は区間 $1 < x < 4$ で単調減少である。

3 $a = \frac{3}{2}$，$b = 4$，$c = -56$

[解説]

$f(x)$ の形より

$f'(x) = -3x^2 + 6ax + 3b = -3(x^2 - 2ax - b)$

一方，条件より $f'(x) = k(x-4)(x+1)$，$k < 0$

と書ける。両方を比べて $k = -3$，$-2a = -3$，$-b = -4$

$f(x) = -x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 12x + c$

で $x = 4$ とおくと，条件より

$f(4) = -64 + 72 + 48 + c = 0$

ゆえに $c = -56$

4 (1) $x = -1$ (2) $x > -\frac{3}{2}$

[解説]

(1) $f'(x) = 2x + 5 = 3$

(2) 条件より $f'(x) = 2x + 5 > 2$

5 $\frac{1}{3} \leqq x \leqq 1$

[解説]

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$

条件より $3x^2 - 4x + 5 \leqq 4$，$3x^2 - 4x + 1 \leqq 0$

これを解くと $\frac{1}{3} \leqq x \leqq 1$ が得られる。

6 (1) $y = 5x - 3$ (2) $y = x + 1$

(3) $y = x + 1$，$y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$，$y = 33x - 63$

[解説]

$f'(x) = 3x^2 + 2x$

グラフ上の点 $(a,\ a^3 + a^2)$ における接線の方程式は

$y - (a^3 + a^2) = (3a^2 + 2a)(x - a)$

$y = (3a^2 + 2a)x - 2a^3 - a^2$ …… ①

(1) ①に $a = 1$ を代入

(2) $f(1) = 2$ より，①が $(1,\ 2)$ を通る場合を考える。

$2 = (3a^2 + 2a)\cdot 1 - 2a^3 - a^2$

$2a^3 - 2a^2 - 2a + 2 = 0$

$a^3 - a^2 - a + 1 = 0$ …… ②

$(1,\ 2)$ における接線は明らかに $(1,\ 2)$ を通るので，②は $a = 1$ を解にもつ。

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
 & & 1 & 0 & -1 \\ \hline
1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
 & & 1 & 1 & \\ \hline
 & 1 & 1 & 0 &
\end{array}$$

$(a - 1)^2(a + 1) = 0$

求める接線は $a = 1$ 以外の場合であるから，$a = -1$

①に代入して

$y = x + 1$

(3) ①が $(2,\ 3)$ を通るのだから

$3 = (3a^2 + 2a)\cdot 2 - 2a^3 - a^2$

$2a^3 - 5a^2 - 4a + 3 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 2 & -5 & -4 & 3 \\
 & & -2 & 7 & -3 \\ \hline
 & 2 & -7 & 3 & 0
\end{array}$$

$(a + 1)(2a^2 - 7a + 3) = 0$

$(a + 1)(2a - 1)(a - 3) = 0$

$a = -1,\ \frac{1}{2},\ 3$

$a = -1$ のときは(2)で求めた。 $a = \frac{1}{2},\ 3$ を①に代入して，求める接線は $y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{2},\ y = 33x - 63$

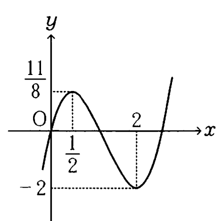
38 関数の極大・極小とグラフ〔P 194～P 199〕

◇確認問題〔P 194～P 196〕

1 グラフは右の通り。

極大値 $\frac{11}{8}$ $\left(x = \frac{1}{2}\right)$

極小値 -2 $(x = 2)$



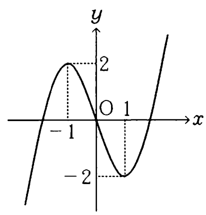
［解説］

$f'(x) = 6x^2 - 15x + 6$

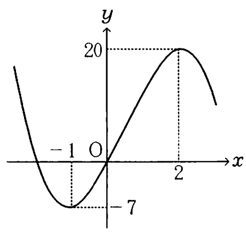
$= 3(2x - 1)(x - 2)$

x		$\frac{1}{2}$		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{11}{8}$	↘	-2	↗

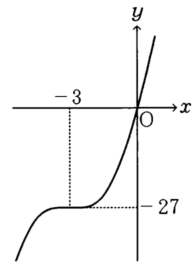
2 (1)



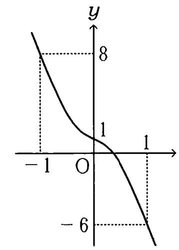
(2)



(3)



(4)



［解説］

(1) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

(2) $f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = -6(x - 2)(x + 1)$

x		-1		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-7	↗	20	↘

(3) $f'(x) = 3x^2 + 18x + 27 = 3(x + 3)^2$

x		-3	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	-27	↗

(4) $f'(x) = -3x^2 - 6 = -3(x^2 + 2)$

3 $a = 1,\ b = -3$；極大値 27 $(x = -3)$，極小値 -5 $(x = 1)$

［解説］

$f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3b$

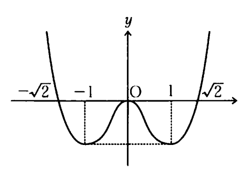
$= 3(x + 3)(x - 1)$

これより $a = 1,\ b = -3$ がわかる。

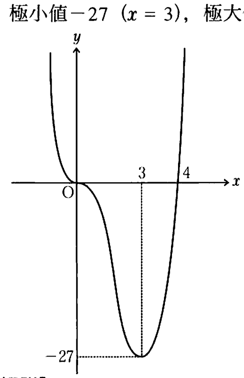
$f(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - 9(-3) = 27$

$f(1) = 1 + 3 + 3(-3) = -5$

4 (1) 極大値 0 $(x = 0)$，極小値 -1 $(x = \pm 1)$



(2) 極小値 -27 $(x = 3)$，極大値なし



［解説］

(1) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x + 1)(x - 1)$

増減表は次のようになる。