9　剰余の定理・因数定理

ポイント1　割り算の式

x の整式を $P(x)$ などの記号で表す．$P(x)$ に $x=\alpha$ を代入した値を $P(\alpha)$ のように書く．

整式 $A(x)$ を整式 $P(x)$ で割った商が整式 $Q(x)$ で，余りが整式 $R(x)$ であるとき，

$$\boldsymbol{A(x)=P(x)Q(x)+R(x)} \quad \cdots\cdots \quad ①$$

が成り立つ．このとき，($R(x)$ の次数) < ($P(x)$ の次数) である．

例　整式 $6x^3-x^2+5$ を整式 $2x^2-x+3$ で割ると，次のようになる．

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 3x+1 \\ \hline
2x^2-x+3 & 6x^3-x^2 \qquad\quad +5 \\
 & \underline{6x^3-3x^2+9x} \\
 & \qquad 2x^2-9x+5 \\
 & \qquad \underline{2x^2-x\ \ +3} \\
 & \qquad\qquad -8x+2
\end{array}
$$

この計算より，商 $3x+1$，余り $-8x+2$

このことは次のように書ける．

$$6x^3-x^2+5=(2x^2-x+3)(3x+1)+(-8x+2)$$

確認問題 1　次の問に答えよ．

□(1)　整式 $A(x)$ を整式 $B(x)$ で割った商が整式 $C(x)$ で，余りが整式 $D(x)$ であった．このとき，$A(x)$ を $B(x)$，$C(x)$，$D(x)$ で表す式を書け．

□(2)　整式 x^3-3x^2+2x+5 を整式 x^2-x+2 で割った商と余りを求め，その結果をポイント 1 の①の形に表せ．

□(3)　整式 $2x^3+5x^2-4x+6$ を整式 x^2+2x-3 で割った商と余りを求め，その結果をポイント 1 の①の形に表せ．

□(4)　整式 x^4+x^2+x+4 を整式 x^2-x+3 で割った商と余りを求め，その結果をポイント 1 の①の形に表せ．

□(5)　整式 x^4-2x^3-8x+1 を整式 x^2-2x+1 で割った商と余りを求め，その結果をポイント 1 の①の形に表せ．

ポイント2 剰余の定理

次の定理（**剰余の定理**）が成り立つ.

整式 $P(x)$ を整式 $x-\alpha$ で割った余りは，定数 $P(\alpha)$ に等しい

注意 $P(x)$ を $x-\alpha$ で割った余りは 1 次未満の整式であるから，定数であることはただちにわかる.

(定理の証明)

商を $Q(x)$，余りを R とすると，

$P(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$

ここで両辺に $x=\alpha$ を代入すると

$P(\alpha)=R$

例 (1) $P(x)=x^3+5x+6$ を $x-1$ で割った余りは，

$P(1)=1^3+5\cdot 1+6=12$

(2) $P(x)=x^3-x^2+4$ を $x+2$ で割った余りは，

$P(-2)=(-2)^3-(-2)^2+4=-8$

確認問題 2　次の余りを剰余の定理を用いて求めよ.

□(1) 整式 x^3-x^2-x+4 を整式 $x-1$ で割った余り

□(2) 整式 x^4-3x^2 を整式 $x-2$ で割った余り

□(3) 整式 x^3+2x^2-5x を整式 $x+3$ で割った余り

□(4) 整式 x^4-6x^3+2 を整式 $x-3$ で割った余り

□(5) 整式 x^4-1 を整式 $x-2$ で割った余り

ポイント3 因数定理

整式 $P(x)$ が整式 $Q(x)$ で**割り切れる**，つまり割り算をすると余り 0 になるとき，$Q(x)$ は $P(x)$ の**因数**であるという.

次の定理（**因数定理**）が成り立つ.

整式 $x-\alpha$ が整式 $P(x)$ の因数である，$P(\alpha)=0$

例 $P(x)=x^3+4x^2+x-6$ とする．整式 $x+3$，整式 $x-2$ が整式 $P(x)$ の因数になるかどうか調べよう.

$P(-3)=(-3)^3+4\cdot(-3)^2+(-3)-6=0$

であるから，$x+3$ は $P(x)$ の因数である．また，

$P(2)=2^3+4\cdot 2^2+2-6=20\neq 0$

であるから，$x-2$ は $P(x)$ の因数ではない.

確認問題 3　次の問に答えよ.

□(1) $P(x)=x^3+2x^2-5x-6$ とする．整式 $x-1$，整式 $x+1$ が整式 $P(x)$ の因数になるかどうか，それぞれ因数定理を用いて調べよ.

□(2) $P(x)=x^3-7x-6$ とする．整式 $x+2$，整式 $x-3$ が整式 $P(x)$ の因数になるかどうか，それぞれ因数定理を用いて調べよ.

□(3) $P(x)=x^4-2x^3-5$ とする．整式 $x-1$，整式 $x-2$ が整式 $P(x)$ の因数になるかどうか，それぞれ因数定理を用いて調べよ.

□(4) $P(x)=x^4-4x^3-2x+6$ とする．整式 $x+2$，整式 $x-3$ が整式 $P(x)$ の因数になるかどうか，それぞれ因数定理を用いて調べよ.

練成問題　A

1　**次の問に答えよ.**　　**(⇨ ポイント 1)**

□(1)　整式 $P(x)$ を整式 x^2+x-2 で割った商が $Q(x)$，余りが $5x-7$ であった．このことをポイント 1 の①の形に表せ.

□(2)　整式 $P(x)$ を整式 x^2-x+4 で割った商が $Q(x)$，余りが $-2x+4$ であった．このことをポイント 1 の①の形に表せ.

□(3)　整式 x^3+5x^2-x+7 を整式 x^2+3x-2 で割った商と余りを求め，その結果をポイント 1 の①の形に表せ.

□(4)　整式 x^3-2x^2+4x+8 を整式 x^2-x-3 で割った商と余りを求め，その結果をポイント 1 の①の形に表せ.

2　**次の余りを剰余の定理を用いて求めよ.**　　**(⇨ ポイント 2)**

□(1)　整式 x^3+x^2-x-3 を整式 $x-1$ で割った余り

□(2)　整式 x^3+2x^2-5 を整式 $x-2$ で割った余り

□(3)　整式 x^4+x^3-x+1 を整式 $x+1$ で割った余り

□(4)　整式 x^3+3x^2-x+4 を整式 $x+2$ で割った余り

3　**次の問に答えよ.**　　**(⇨ ポイント 3)**

□(1)　$P(x)=x^3+2x^2-13x+10$ とする．整式 $x+1$，整式 $x-2$ が整式 $P(x)$ の因数になるかどうか，それぞれ因数定理を用いて調べよ.

□(2)　$P(x)=x^3+6x^2+11x+6$ とする．整式 $x+2$，整式 $x+3$ が整式 $P(x)$ の因数になるかどうか，それぞれ因数定理を用いて調べよ.

□(3)　$P(x)=x^3+5x^2-2x-24$ とする．整式 $x-3$，整式 $x+4$ が整式 $P(x)$ の因数になるかどうか，それぞれ因数定理を用いて調べよ.

練成問題　B

1 次の問に答えよ.

□(1)　整式 $x^4 + 3x^3 + x^2 - x$ を整式 $x^2 + 2x + 2$ で割った商と余りを求め，その結果をポイント 1 の①の形に表せ.

□(2)　整式 $x^4 + 5x^2 + 3x - 1$ を整式 $x^2 - x + 3$ で割った商と余りを求め，その結果をポイント 1 の①の形に表せ.

□(3)　整式 $x^5 + x^3 + 3x$ を整式 $x^2 - x$ で割った商と余りを求め，その結果をポイント 1 の①の形に表せ.

2 次の問に答えよ.

□(1)　整式 $P(x)$ を整式 $x + 3$ で割った商が $x^2 - x + 2$ で余りが -5 のとき，$P(x)$ を求めよ.

□(2)　整式 $P(x)$ を整式 $x^2 + 3x - 1$ で割った商が $2x + 3$ で余りが $-5x + 12$ のとき，$P(x)$ を求めよ.

□(3)　整式 $P(x)$ を整式 $2x^2 + 3x + 3$ で割った商が $3x - 2$ で余りが $10x + 7$ のとき，$P(x)$ を求めよ.

3 次の余りを剰余の定理を用いて求めよ.

□(1)　整式 $x^5 - x^3 + x^2$ を整式 $x + 1$ で割った余り

□(2)　整式 $x^4 - 2x^2 + 7$ を整式 $x - 3$ で割った余り

□(3)　整式 $x^{2n} + x^{2n-1}$ を整式 $x + 1$ で割った余り（ただし n は自然数とする）

□(4)　整式 $x^n - x^{n-2}$ を整式 $x - 1$ で割った余り（ただし n は 2 以上の自然数とする）

4 次の問に答えよ.

□(1)　$P(x) = (x-1)^2(x+2)(x-3)$ とする．整式 $x - a$ が整式 $P(x)$ の因数となるような定数 a の値をすべて求めよ.

□(2)　$P(x) = (x^2 - 2x - 1)(x^2 + 3x + 1)$ とする．整式 $x - a$ が整式 $P(x)$ の因数となるような定数 a の値をすべて求めよ.

10　剰余の定理・因数定理の応用

ポイント1　整式が割り切れる条件

例題　**整式 $P(x) = x^3 + ax^2 - 5x + b$ が整式 $x + 2$，整式 $x - 3$ でそれぞれ割り切れるとき，定数 a，b の値を求めよ．**

（解答）　因数定理により　$P(-2) = 0$，$P(3) = 0$

したがって

$$\begin{cases} (-2)^3 + a(-2)^2 - 5\cdot(-2) + b = 0 \\ 3^3 + a\cdot 3^2 - 5\cdot 3 + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + b + 2 = 0 & \cdots\cdots ① \\ 9a + b + 12 = 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②－①より　$5a + 10 = 0$，　$a = -2$

$\therefore$　$b = 6$

確認問題 1　**次の問に答えよ．**

□(1)　整式 $P(x) = x^3 - 3x + a$ が整式 $x - 2$ で割り切れるとき，定数 a の値を求めよ．

□(2)　整式 $P(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ が整式 $x - 1$，整式 $x + 3$ でそれぞれ割り切れるとき，定数 a，b の値を求めよ．

ポイント2　整式を２次式で割った余り

例題　**整式 $P(x)$ を整式 $x + 1$ で割った余りは -8，整式 $x - 2$ で割った余りは 7 である．このとき $P(x)$ を整式 $(x + 1)(x - 2)$ で割った余りを求めよ．**

（解答）　求める余りは 1 次以下の整式であるから，$ax + b$（a，b は定数）とおける．商を $Q(x)$ とおくと，

$$P(x) = (x + 1)(x - 2)Q(x) + ax + b \quad \cdots\cdots ①$$

剰余の定理より $P(-1) = -8$，$P(2) = 7$ だから，①の両辺に $x = -1$，$x = 2$ をそれぞれ代入すると，

$$\begin{cases} -8 = -a + b & \cdots\cdots ② \\ 7 = 2a + b & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

③－②より　$3a = 15$，　$a = 5$

$\therefore$　$b = -3$

したがって，求める余りは　$5x - 3$

確認問題 2　**次の問に答えよ．**

□(1)　整式 $P(x)$ を整式 $x - 1$ で割った余りは 4，整式 $x - 2$ で割った余りは 7 である．このとき $P(x)$ を整式 $(x - 1)(x - 2)$ で割った余りを求めよ．

□(2)　整式 $P(x)$ を整式 $x + 1$ で割った余りは -6，整式 $x - 3$ で割った余りは 10 である．このとき $P(x)$ を整式 $(x + 1)(x - 3)$ で割った余りを求めよ．

ポイント3　因数定理を利用した因数分解

整式 $P(x)$ を因数分解するためには，まず $P(\alpha)=0$ となる数 α を捜す．そのような α がみつかれば，$P(x)$ は $x-\alpha$ で割り切れる．

α の候補は，±(定数項の約数)

もっと一般には，$\pm\dfrac{(\text{定数項の約数})}{(\text{最高次係数の約数})}$

例　$P(x)=x^3-7x+6$ は，$P(2)=0$ をみたすから，$x-2$ で割り切れる．割り算を実行して，

$$x^3-7x+6=(x-2)(x^2+2x-3)$$

さらに因数分解すると

$$x^3-7x+6=(x-2)(x-1)(x+3)$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & +2x & -3 & \\ \hline
x-2 & x^3 & & -7x & +6 \\
 & x^3 & -2x^2 & & \\ \hline
 & & 2x^2 & -7x & \\
 & & 2x^2 & -4x & \\ \hline
 & & & -3x & +6 \\
 & & & -3x & +6 \\ \hline
 & & & & 0
\end{array}$$

注意　$P(1)=0$，$P(-3)=0$ に気づけば，そちらを使って因数分解することもできる．

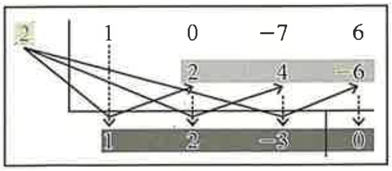
確認問題 3　次の式を因数分解せよ．

□(1)　$x^3-6x^2+11x-6$　　□(2)　$x^3+3x^2-16x+12$

ポイント4　組立除法

例　ポイント3の割り算は，係数だけ抜き出して書くと右のようになる．ここで影をつけた部分だけを書くようにして，さらに引き算を避けて足し算だけで計算できるようにすると，次のようになる．

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 2 & -3 & \\ \hline
1-2 & 1 & 0 & -7 & 6 \\
 & 1 & -2 & & \\ \hline
 & & 2 & -7 & \\
 & & 2 & -4 & \\ \hline
 & & & -3 & 6 \\
 & & & -3 & 6 \\ \hline
 & & & & 0
\end{array}$$



一般に，px^3+qx^2+rx+s を $x-\alpha$ で割る計算を書くと次のようになる．

$$\begin{array}{c|cccc}
\alpha & p & q & r & s \\
 & & p\alpha & p\alpha^2+q\alpha & p\alpha^3+q\alpha^2+r\alpha \\ \hline
 & p & p\alpha+q & p\alpha^2+q\alpha+r & \big|\ p\alpha^3+q\alpha^2+r\alpha+s
\end{array}$$

確認問題 4　次の割り算を組立除法によって計算し，結果を前節のポイント1の①の形に表せ．

□(1)　$(x^3+x^2+2x-4)\div(x-1)$　　□(2)　$(x^3+3x^2+4x+2)\div(x+2)$

練成問題　A

1　**次の問に答えよ.**　**(⇨ ポイント1)**

□(1)　整式 $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + a$ が整式 $x - 1$ で割り切れるとき，定数 a の値を求めよ.

□(2)　整式 $P(x) = x^3 + ax^2 - 3x + 1$ が整式 $x + 1$ で割り切れるとき，定数 a の値を求めよ.

□(3)　整式 $P(x) = x^3 + x^2 + ax + b$ が整式 $x - 1$，整式 $x - 2$ でそれぞれ割り切れるとき，定数 a，b の値を求めよ.

□(4)　整式 $P(x) = x^3 + ax^2 + x + b$ が整式 $x + 1$，整式 $x - 3$ でそれぞれ割り切れるとき，定数 a，b の値を求めよ.

2　**次の問に答えよ.**　**(⇨ ポイント2)**

□(1)　整式 $P(x)$ を整式 $x + 1$ で割った余りは 5，整式 $x - 2$ で割った余りは 11 である．このとき $P(x)$ を整式 $(x + 1)(x - 2)$ で割った余りを求めよ.

□(2)　整式 $P(x)$ を整式 $x - 1$ で割った余りは 1，整式 $x - 4$ で割った余りは 19 である．このとき $P(x)$ を整式 $(x - 1)(x - 4)$ で割った余りを求めよ.

□(3)　整式 $P(x)$ を整式 $x + 2$ で割った余りは -2，整式 $x + 3$ で割った余りは -5 である．このとき $P(x)$ を整式 $(x + 2)(x + 3)$ で割った余りを求めよ.

3　**次の式を因数分解せよ.**　**(⇨ ポイント3)**

□(1)　$x^3 - 13x + 12$　　□(2)　$x^3 - 5x^2 + 2x + 8$

□(3)　$x^3 + 6x^2 - x - 30$

4　**次の割り算を組立除法によって計算し，結果を前節のポイント1の①の形に表せ.**　**(⇨ ポイント4)**

□(1)　$(x^3 - 3x^2 + 4x - 2) \div (x - 1)$　　□(2)　$(x^3 + 2x^2 - 7x - 2) \div (x - 2)$

□(3)　$(x^3 + 2x^2 - 2x + 4) \div (x + 3)$

練成問題　B

1　次の問に答えよ．

□(1)　整式 $P(x)=x^3+ax^2+7x+b$ が整式 $x-1$ で割り切れ，$P(x)$ を整式 $x-2$ で割った余りが -1 であるとき，定数 a，b の値を求めよ．

□(2)　整式 $P(x)=x^3-3x^2+ax+b$ が整式 $x-2$ で割り切れ，$P(x)$ を整式 $x-1$ で割った余りが -2 であるとき，定数 a，b の値を求めよ．

□(3)　整式 $P(x)=x^3+ax^2+3x+b$ を整式 $x-2$ で割った余りが 30，$P(x)$ を整式 $x+3$ で割った余りが 5 であるとき，定数 a，b の値を求めよ．

2　次の問に答えよ．

□(1)　整式 $P(x)$ を整式 $x-2$ で割った余りは 3，整式 $x-4$ で割った余りは 17 である．このとき $P(x)$ を x^2-6x+8 で割った余りを求めよ．

□(2)　整式 $P(x)$ を整式 $x+3$ で割った余りは -9，整式 $x-5$ で割った余りは 23 である．このとき $P(x)$ を $x^2-2x-15$ で割った余りを求めよ．

3　次の問に答えよ．

□(1)　整式 x^3+ax^2+5x+b を整式 x^2-x-2 で割った余りが $15x+10$ のとき，定数 a，b の値を求めよ．

□(2)　整式 x^3+4x^2+ax+b を整式 x^2-x-6 で割った余りが $7x+33$ のとき，定数 a，b の値を求めよ．

4　次の問に答えよ．

□(1)　$P(x)=2x^3+3x^2+3x+1$ とする．$P\left(-\frac{1}{2}\right)$ を求めよ．

□(2)　(1)の $P(x)$ を因数分解せよ．

11　高次方程式

ポイント1　置き換えで解ける高次方程式

整式や方程式の次数の大小には，高い，低いという用語を使う．

例　4次方程式 $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$ を解こう．

$x^2 = X$ とおくと，$X^2 + 2X - 8 = 0$，　$(X + 4)(X - 2) = 0$

$X = -4$，2 すなわち $x^2 = -4$，2

$\therefore$　$x = \pm 2i$，$\pm\sqrt{2}$

確認問題 1　次の方程式を解け．

□(1)　$x^4 - 1 = 0$　　□(2)　$x^4 - 4x^2 - 5 = 0$

ポイント2　因数分解で解ける高次方程式(1)

例　3次方程式 $x^3 - 5x + 2 = 0$ を解こう．

左辺を $P(x)$ とおくと，$P(2) = 0$ だから，左辺は $x - 2$ で割り切れる．実際に割り算すると，

$(x - 2)(x^2 + 2x - 1) = 0$

よって $x - 2 = 0$ または $x^2 + 2x - 1 = 0$

$x - 2 = 0$ のとき　$x = 2$

$x^2 + 2x - 1 = 0$ のとき　$x = -1 \pm \sqrt{2}$

すなわち，$x = 2$，$-1 \pm \sqrt{2}$

確認問題 2　次の方程式を解け．

□(1)　$x^3 - 4x + 3 = 0$　　□(2)　$x^3 + x^2 + 2x + 2 = 0$

ポイント3　因数分解で解ける高次方程式(2)

例　4次方程式 $x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 3 = 0$ を解こう．

解 $x = 1$ があるから左辺は $x - 1$ で割り切れて，

$(x - 1)(x^3 + 2x^2 - 2x - 3) = 0$

ここで，方程式 $x^3 + 2x^2 - 2x - 3 = 0$ に解 $x = -1$ があるから，さらに因数分解できて

$(x - 1)(x + 1)(x^2 + x - 3) = 0$

$\therefore$　$x = \pm 1$，$\dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

確認問題 3　次の方程式を解け．

□(1)　$x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = 0$　　□(2)　$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$

ポイント4 高次方程式の重解

例 3次方程式 $x^3-5x^2+8x-4=0$ …… ①を解こう.

解 $x=1$ があるから左辺は $x-1$ で割り切れて,

$(x-1)(x^2-4x+4)=0$, $(x-1)(x-2)^2=0$

$\therefore\ x=1,\ 2$

この解 $x=2$ を, ①の **2重解**という.

同様に, 方程式 $(x-1)^3(x-2)=0$ の解 $x=1$ は, この方程式の **3重解**という.

2次方程式の重解は, この言い方では2重解となる. 2重解は2つと考えると, 2次方程式の解は複素数の範囲ではつねに2個であるともいえる. 同じように考えると, n 次方程式の解は複素数の範囲ではつねに n 個であることが知られている.

確認問題 4 次の方程式の解 x は何重解であるか答えよ.

□(1) $(x-1)^2(x+1)^3=0$, $x=1$　　□(2) $x(x-2)^3=0$, $x=2$

ポイント5 1の3乗根

方程式 $x^3-1=0$ を解こう. 因数分解により,

$(x-1)(x^2+x+1)=0$　　$\therefore\ x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

この方程式の解は, 3乗したら1になる数だから, 1の **3乗根**(または**立方根**)という. このうち虚数のものの一方を取って, 記号 ω (オメガ)で表すことがある. このときもう一方の解は ω^2 となる.

$\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$

また, 複素数の範囲での1の3乗根は1, ω, ω^2 だけである.

例題 ω を1の3乗根の虚数のものの1つとするとき, 次の式の値をできるだけ簡単な ω の式で表せ.

(1) ω^{11}　　(2) $\omega^{10}+\omega^5$

(解答) (1) $\omega^{11}=\omega^{9+2}=(\omega^3)^3\cdot\omega^2=\omega^2$

(2) $\omega^{10}+\omega^5=\omega^{9+1}+\omega^{3+2}=\omega+\omega^2$

$\omega^2+\omega+1=0$ より, $\omega^2=-\omega-1$ だから,

$\omega^{10}+\omega^5=\omega+(-\omega-1)=-1$

確認問題 5 ω を1の3乗根の虚数のものの1つとするとき, 次の式の値をできるだけ簡単な ω の式で表せ.

□(1) ω^7　　□(2) $\omega^4+\omega^2+1$

ポイント6　与えられた値を解にもつ３次方程式

例題１　**３次方程式 $x^3-3x^2+ax+b=0$ が１，４を解にもつとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ．**

（解答）　１と４が解であるから，因数定理により，

$$\begin{cases} 1^3-3\cdot 1^2+a\cdot 1+b=0 \\ 4^3-3\cdot 4^2+a\cdot 4+b=0 \end{cases}$$

これより

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 4a+b=-16 \end{cases}$$

これを解いて　$a=-6$，$b=8$

よって，方程式は

$$x^3-3x^2-6x+8=0$$

これは $(x-1)(x-4)$ で割れることを用いると

$$(x-1)(x-4)(x+2)=0$$

よって他の解は　$x=-2$

答　$a=-6$，$b=8$，他の解は $x=-2$

例題２　**３次方程式 $x^3-2x^2+ax+b=0$ が $1+2i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値を求めよ．また他の解を求めよ．**

（解答）　$1+2i$ が解であるから，

$$(1+2i)^3-2(1+2i)^2+a(1+2i)+b=0$$

これを展開して整理すると

$$(a+b-5)+(2a-10)i=0$$

a，b は実数であるから

$$\begin{cases} a+b-5=0 \\ 2a-10=0 \end{cases}$$

これより　$a=5$，$b=0$

よって，もとの方程式は

$$x^3-2x^2+5x=0$$

これを因数分解すると

$$x(x^2-2x+5)=0$$

$x^2-2x+5=0$ より　$x=1\pm 2i$

したがって他の解は　$x=1-2i$，0

答　$a=5$，$b=0$，他の解は　$x=1-2i$，0

一般に，係数が実数である方程式が複素数解 $a+bi$（a，b は実数；i は虚数単位）をもつならば，それと共役な複素数 $a-bi$ もこの方程式の解である．

確認問題 6　次の問に答えよ．

□(1)　3 次方程式 $x^3 + 2x^2 - ax + b = 0$ が -1，3 を解にもつとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ．

□(2)　3 次方程式 $2x^3 - x^2 + ax - b = 0$ が 2，-3 を解にもつとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ．

□(3)　3 次方程式 $x^3 + 3x^2 + ax - b = 0$ が $2 - i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値を求めよ．また他の解を求めよ．

□(4)　3 次方程式 $x^3 - 6x^2 - 2ax + b = 0$ が $1 - 3i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値を求めよ．また他の解を求めよ．

ポイント7　（発展）3次方程式の解と係数の関係

3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ の 3 つの解を α，β，γ とすると

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \dfrac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

例題　**3次方程式 $x^3 - 2x^2 + 4x - 5 = 0$ の3つの解を α，β，γ とするとき，$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ の値を求めよ．**

（解答）　解と係数の関係から

$$\alpha + \beta + \gamma = 2$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 4$$

一方

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

であるから

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2^2 - 8$$
$$= -4$$

答　-4

確認問題 7　**3次方程式 $x^3 + 2x^2 - 5x + 2 = 0$ の3つの解を α，β，γ とするとき，次の値を求めよ．**

□(1)　$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

□(2)　$(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$

□(3)　$\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}$

練成問題　A

1　次の方程式を解け．　(⇨ ポイント１)

□(1)　$x^4-16=0$　□(2)　$x^4-x^2-6=0$　□(3)　$x^4+2x^2-3=0$

2　次の方程式を解け．　(⇨ ポイント２)

□(1)　$x^3+x^2-4x+2=0$　□(2)　$x^3+4x^2-7x-10=0$

□(3)　$x^3-2x^2+3x-2=0$　□(4)　$x^3-2x-4=0$

3　次の方程式を解け．　(⇨ ポイント３)

□(1)　$x^4+3x^3-x^2-5x+2=0$　□(2)　$x^4-x^3-7x^2+x+6=0$

□(3)　$x^4-3x^3+4x^2-8=0$　□(4)　$x^4+2x^3+x^2+8x-12=0$

4　次の方程式の解 x は何重解であるか答えよ．　(⇨ ポイント４)

□(1)　$x^2(x-1)=0$，$x=0$　□(2)　$(x-1)^4(x+3)^2=0$，$x=-3$

□(3)　$(x-2)^2(x+2)^3=0$，$x=-2$

5　次の方程式を解け．　(⇨ ポイント２，４)

□(1)　$x^3-4x^2+5x-2=0$　□(2)　$x^3-x^2-8x+12=0$

6　ωを１の３乗根の虚数のものの１つとするとき，次の式の値をできるだけ簡単なωの式で表せ．
(⇨ ポイント５)

□(1)　ω^{20}　□(2)　ω^{99}　□(3)　$\omega^8+\omega^4+1$　□(4)　$\omega^7+\omega^2$　□(5)　$\omega^{50}+\omega^{25}$

7　次の問に答えよ．　(⇨ ポイント６)

□(1)　３次方程式 $x^3-2x^2-2ax+b=0$ が 1，-2 を解にもつとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ．

□(2)　３次方程式 $x^3-4x^2+ax+3b=0$ が $2-3i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値を求めよ．また他の解を求めよ．

練成問題　B

1　**次の方程式を解け．**

□(1)　$x^4 - 3x^2 + 1 = 0$　　□(2)　$x^4 + 3x^2 + 4 = 0$

2　**次の問に答えよ．**

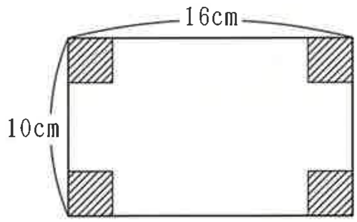
□(1)　$P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x - 3$ とおく．$P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ であることを示せ．

□(2)　方程式 $2x^3 + 3x^2 + 4x - 3 = 0$ を解け．

3　**次の問に答えよ．**

□(1)　ある自然数の 3 乗は，その数の 3 倍よりちょうど 2 だけ大きいという．この自然数を求めよ．

□(2)　右図のような縦 10cm，横 16cm の鉄板の 4 隅から同じ大きさの正方形の板を切り取り，残りを折り曲げてふたのない直方体の形の箱を作りたい．箱の容積を 144cm³ にするためには 1 辺何 cm の正方形の板を切り取ればよいか．



4　**方程式 $x^3 - 1 = 0$ の虚数解の 1 つを ω とおくとき，次の問に答えよ．**

□(1)　ω^2 は方程式 $x^3 - 1 = 0$ の解であることを示せ．

□(2)　方程式 $x^3 - 1 = 0$ の 3 つの解は 1，ω，ω^2 であることを示せ．

5　**次の問に答えよ．**

□(1)　方程式 $x^2 + x + 1 = 0$ の 2 つの解を ω，ω' とおくとき，$\omega^3 = 1$ であることを示せ．

□(2)　解と係数の関係を使って，(1)の ω，ω' が $\omega^2 = \omega'$ をみたすことを示せ．

12　恒等式

ポイント1　恒等式

1)　文字を含んだ等式で，文字にどんな値を代入してもつねに成り立つものを恒等式という．式の変形によって導かれる等式は，恒等式になる．

2)　「p ならば q」を「$p \Longrightarrow q$」と書く．

3)　「p ならば q，かつ q ならば p」を「$p \Longleftrightarrow q$」と書く．

4)　式が x についての式であることを示すのに，$f(x)$，$g(x)$ などの記号を使う．たとえば

$f(x) = 2x^2 - 3x - 1$，$g(x) = 3x^3 - x^2 + 5x - 3$

5)　$f(x)$ に $x = a$ を代入したときの値を $f(a)$ と書く．

例　$f(x) = 3x^2 + 4x - 3$ のとき，$x = 2$，$x = -1$，$x = a$ を代入したときの値を求める．

$f(2) = 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 17$

$f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 3 = -4$

$f(a) = 3a^2 + 4a - 3$

確認問題 1　次の問に答えよ．

□(1)　$f(x) = -x^2 + 4x + 3$ のとき $x = 3$，$x = -3$，$x = a$ を代入したときの値を求めよ．

□(2)　$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ のとき，$x = 1$，$x = -2$，$x = b$ を代入したときの値を求めよ．

□(3)　$g(x) = 2x^2 - 3x + 2$ のとき，$x = 2$，$x = -2$，$x = -a$ を代入したときの値を求めよ．

ポイント2　恒等式である条件

1)　$ax^2 + bx + c = 0$ が x についての恒等式

$\Longleftrightarrow \quad a = b = c = 0$

2)　$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ が x についての恒等式

$\Longleftrightarrow \quad a = a'$，$b = b'$，$c = c'$

例題　等式 $a(x-1)^2 + b(x-1) + c = 3x^2 + 2x + 4$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ．

(解1) 等式の左辺を展開して整理する．

$a(x^2 - 2x + 1) + b(x - 1) + c = 3x^2 + 2x + 4$

$ax^2 + (-2a + b)x + (a - b + c) = 3x^2 + 2x + 4$

これが x の恒等式であるから

$$\begin{cases} a = 3 & \cdots\cdots ① \\ -2a + b = 2 & \cdots\cdots ② \\ a - b + c = 4 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①を②に代入して

$b = 8 \quad \cdots\cdots ②'$

①，②' を③に代入して

$c = 9$　　　　答　$a = 3$，$b = 8$，$c = 9$

（解２） 等式の左辺を展開し，右辺を移項して，左辺にまとめる．

$$a(x^2-2x+1)+b(x-1)+c=3x^2+2x+4$$

$$(a-3)x^2+(-2a+b-2)x+(a-b+c-4)=0$$

これが x の恒等式であるから

$$\begin{cases} a-3=0 & \cdots\cdots \text{①} \\ -2a+b-2=0 & \cdots\cdots \text{②} \\ a-b+c-4=0 & \cdots\cdots \text{③} \end{cases}$$

①より　$a=3$　……　①′

①′を②に代入して

$b=8$　……　②′

①′，②′を③に代入して

$c=9$

（解３） 等式 $a(x-1)^2+b(x-1)+c=3x^2+2x+4$ が恒等式であるから，

$x=1$，$x=0$，$x=2$ のときも成り立つ．

$x=1$ を両辺に代入して

$$a(1-1)^2+b(1-1)+c=3\cdot1^2+2\cdot1+4$$

$c=9$　……　①

$x=0$ を両辺に代入して

$$a(0-1)^2+b(0-1)+c=3\cdot0^2+2\cdot0+4$$

$a-b+c=4$　……　②

$x=2$ を両辺に代入して

$$a(2-1)^2+b(2-1)+c=3\cdot2^2+2\cdot2+4$$

$a+b+c=20$　……　③

②＋③より

$2a+2c=24$

$a+c=12$

①より $c=9$ だから

$a=3$　……　④

①，④を③に代入して

$3+b+9=20$，　$b=8$

また，$a=3$，$b=8$，$c=9$ のとき与式は恒等式となり，他の全ての x の値についても成り立つ．

確認問題２　次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ．

□(1)　$ax^2+(b-2)x+c=2x^2+4x-3$

□(2)　$a(x+1)^2+b(x+1)+c=2x^2+4x+5$

□(3)　$a(x-2)^2+b(x-2)+c=2x^2$

□(4)　$a(x-1)^2+b(x+1)^2+c=3x^2-2x+4$

□(5)　$(2a-b)x^2+(b-c)x+(c-a+1)=0$

□(6)　$ax(x-1)+b(x-1)(x+1)+cx(x+1)=2x+1$

ポイント3　分数式の恒等式

例題　等式 $\dfrac{3x+1}{(x-1)(x+3)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+3}$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b の値を定めよ．

（解１） 与えられた等式が恒等式ならば，両辺に $(x-1)(x+3)$ をかけて得られる等式も恒等式である．

$$3x+1=a(x+3)+b(x-1)$$
$$=(a+b)x+(3a-b)$$

これが x についての恒等式であるから

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 3a-b=1 \end{cases}$$

これを解いて　$a=1$，$b=2$

答　$a=1$，$b=2$

（解２） 与えられた式が恒等式ならば，両辺に $(x-1)(x+3)$ をかけて得られる等式も恒等式である．

$$3x+1=a(x+3)+b(x-1) \quad \cdots\cdots \quad ①$$

①の両辺に $x=1$ を代入して

$$4=4a,\quad a=1$$

①の両辺に $x=-3$ を代入して

$$-8=-4b,\quad b=2$$

$a=1$，$b=2$ を①に代入すると，右辺は

$$1\cdot(x+3)+2(x-1)=3x+1$$

よってこのとき①は恒等式となるので，$a=1$，$b=2$ は解である．

確認問題3　次の問に答えよ．

□(1)　等式 $\dfrac{5x-7}{(x-1)(2x-3)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{2x-3}$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b の値を定めよ．

□(2)　等式 $\dfrac{-x-7}{(2x-1)(x-3)}=\dfrac{a}{2x-1}-\dfrac{b}{x-3}$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b の値を定めよ．

□(3)　等式 $\dfrac{7x-3}{(3x-2)(2x-1)}=\dfrac{a}{3x-2}+\dfrac{b}{2x-1}$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b の値を定めよ．

練成問題　A

1　次の問に答えよ.　(⇨ ポイント1)

□(1)　$f(x)=3x^2-2x+5$ のとき，$x=2$，$x=-1$，$x=a$ を代入したときの値を求めよ.

□(2)　$f(x)=x^3-2x^2+4x-3$ のとき，$x=3$，$x=-2$，$x=b$ を代入したときの値を求めよ.

□(3)　$g(x)=-2x^2+4x-3$ のとき，$x=2$，$x=-1$，$x=-a$ を代入したときの値を求めよ.

□(4)　$g(x)=4x^3-5x^2-2x+6$ のとき，$x=2$，$x=-3$，$x=-b$ を代入したときの値を求めよ.

□(5)　$f(a)=2a^2-4a+2$ のとき，$a=1$，$a=-2$ を代入したときの値を求めよ.

2　次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ.　(⇨ ポイント2)

□(1)　$ax+3=2x+b$

□(2)　$ax^2+3x+b=2x^2+cx+2$

□(3)　$a(x-2)+b(x+3)+2=2x-2$

□(4)　$a(x-1)+3=3x+b(x-2)$

□(5)　$(a-2)x^2+bx+4=3x^2+(2b-1)x+c$

□(6)　$(2a+1)x^2+3x+b=3x^2+(b-1)x+c$

□(7)　$2ax^2+5x+2b=-bx^2+cx+(a+c)$

□(8)　$(a-2b)x^2+(b-2c)x+(c+a-10)=0$

□(9)　$a(x-2)^2+b(x-2)+c=x^2-3x-4$

□(10)　$a(x+1)^2+b(x+1)+c=2x^2+3x+4$

□(11) $a(x+1)^2+b(x+1)+c=x^2$

□(12) $a(x-2)^2+b(x+2)^2+c=4x^2+3$

□(13) $(x-1)^2+a(x+b)+1=x^2-5x-2$

3 次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b の値を定めよ． (⇨ ポイント 3)

□(1) $\dfrac{-3}{(2x-1)(x-2)}=\dfrac{a}{2x-1}-\dfrac{b}{x-2}$

□(2) $\dfrac{7}{(x-4)(3x-5)}=\dfrac{a}{x-4}-\dfrac{b}{3x-5}$

□(3) $\dfrac{8x-29}{(x-5)(3x-4)}=\dfrac{a}{x-5}+\dfrac{b}{3x-4}$

□(4) $\dfrac{4x+8}{(x-6)(3x-2)}=\dfrac{a}{x-6}-\dfrac{b}{3x-2}$

練成問題　B

1　次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b の値を定めよ．

□(1)　$x^3-6x^2+13x-4=(x-2)^3+a(x-2)^2+b(x-2)+6$

□(2)　$x^3+ax^2+4x-5=x(x-1)(x+1)+5(x-1)+bx$

□(3)　$x^3+5x^2+7x-4=x(x+1)(x+2)+ax(x+1)+bx-4$

2　次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ．

□(1)　$a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x-3)+c(x-3)(x-1)=2x^2+2$

□(2)　$a(x+1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x+1)=4$

□(3)　$a(x+1)(x-1)+bx(x+1)+cx(x-1)=5(x-1)$

3　次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ．

□(1)　$x^3-ax^2+bx-c=(x-1)(x-2)(x-3)$

□(2)　$x^3=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)+d(x-1)(x-2)(x-3)$

□(3)　$x^3+7x^2-5x+12=a(x-1)(x-2)(x-3)+b(x-2)(x-3)(x-4)$
$$+c(x-3)(x-4)(x-1)+d(x-4)(x-1)(x-2)$$

4□　次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c，d，e の値を定めよ．

$$(x-1)^4=a+bx+cx(x+1)+dx(x+1)(x+2)+ex(x+1)(x+2)(x+3)$$

5　次の問に答えよ．

□(1)　$(2k+1)x-(k-2)y+2k+4=0$ が k のどんな値に対しても成り立つように，x，y の値を定めよ．

□(2)　$(k-2)x+(k-1)y=4k+1$ が k のどんな値に対しても成り立つように，x，y の値を定めよ．