(1) 2つの解をα，βとおくと，この条件はα，βが異なる実数で$\alpha+\beta>0$，$\alpha\beta>0$と同値である．よって

$D>0$，$-(2k-6)>0$，　$k+3>0$

$D>0$より

$k^2-7k+6>0$，　$k<1$，$6<k$

(2) 2つの解をα，βとおくと，この条件はα，βが異なる実数で$\alpha+\beta>0$，$\alpha\beta>0$と同値である．よって

$D>0$，$-2k>0$，$k+1>0$

$D>0$より

$k^2-k-1>0$，　$k<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<k$

9　剰余の定理・因数定理〔P 38～P 41〕

◇確認問題〔P 38～P 39〕

1 (1) $A(x)=B(x)C(x)+D(x)$

(2) 商$x-2$，余り$-2x+9$

$x^3-3x^2+2x+5=(x^2-x+2)(x-2)-2x+9$

(3) 商$2x+1$，余り9

$2x^3+5x^2-4x+6=(x^2+2x-3)(2x+1)+9$

(4) 商x^2+x-1，余り$-3x+7$

$x^4+x^2+x+4=(x^2-x+3)(x^2+x-1)-3x+7$

(5) 商x^2-1，余り$-10x+2$

$x^4-2x^3-8x+1=(x^2-2x+1)(x^2-1)-10x+2$

2 (1) 3　(2) 4　(3) 6　(4) -79　(5) 15

［解説］

(1) 1^3-1^2-1+4

(2) $2^4-3\cdot2^2$

(3) $(-3)^3+2\cdot(-3)^2-5\cdot(-3)$

(4) $3^4-6\cdot3^3+2$

(5) 2^4-1

3 (1) $x-1$ … $P(x)$の因数ではない

$x+1$ … $P(x)$の因数である

(2) $x+2$ … $P(x)$の因数である

$x-3$ … $P(x)$の因数である

(3) $x-1$ … $P(x)$の因数ではない

$x-2$ … $P(x)$の因数ではない

(4) $x+2$ … $P(x)$の因数ではない

$x-3$ … $P(x)$の因数ではない

［解説］

(1) $P(1)=1^3+2\cdot1^2-5\cdot1-6=-8\neq0$

$P(-1)=(-1)^3+2\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)-6=0$

(2) $P(-2)=(-2)^3-7\cdot(-2)-6=0$

$P(3)=3^3-7\cdot3-6=0$

(3) $P(1)=1^4-2\cdot1^3-5=-6\neq0$

$P(2)=2^4-2\cdot2^3-5=-5\neq0$

(4) $P(-2)=(-2)^4-4\cdot(-2)^3-2\cdot(-2)+6=58\neq0$

$P(3)=3^4-4\cdot3^3-2\cdot3+6=-27\neq0$

◇練成問題A〔P 40〕

1 (1) $P(x)=(x^2+x-2)Q(x)+5x-7$

(2) $P(x)=(x^2-x+4)Q(x)-2x+4$

(3) 商$x+2$，余り$-5x+11$

$x^3+5x^2-x+7=(x^2+3x-2)(x+2)-5x+11$

(4) 商$x-1$，余り$6x+5$

$x^3-2x^2+4x+8=(x^2-x-3)(x-1)+6x+5$

2 (1) -2　(2) 11　(3) 2　(4) 10

［解説］

(1) 1^3+1^2-1-3

(2) $2^3+2\cdot2^2-5$

(3) $(-1)^4+(-1)^3-(-1)+1$

(4) $(-2)^3+3\cdot(-2)^2-(-2)+4$

3 (1) $x+1$ … $P(x)$の因数ではない

$x-2$ … $P(x)$の因数である

(2) $x+2$ … $P(x)$の因数である

$x+3$ … $P(x)$の因数である

(3) $x-3$ … $P(x)$の因数ではない

$x+4$ … $P(x)$の因数である

［解説］

(1) $P(-1)=(-1)^3+2\cdot(-1)^2-13\cdot(-1)+10$

$=24\neq0$

$P(2)=2^3+2\cdot2^2-13\cdot2+10=0$

(2) $P(-2)=(-2)^3+6\cdot(-2)^2+11\cdot(-2)+6=0$

$P(-3)=(-3)^3+6\cdot(-3)^2+11\cdot(-3)+6=0$

(3) $P(3)=3^3+5\cdot3^2-2\cdot3-24=42\neq0$

$P(-4)=(-4)^3+5\cdot(-4)^2-2\cdot(-4)-24=0$

◇練成問題B〔P 41〕

1 (1) 商x^2+x-3，余り$3x+6$

$x^4+3x^3+x^2-x=(x^2+2x+2)(x^2+x-3)+3x+6$

(2) 商x^2+x+3，余り$3x-10$

$x^4+5x^2+3x-1=(x^2-x+3)(x^2+x+3)+3x-10$

(3) 商x^3+x^2+2x+2，余り$5x$

$x^5+x^3+3x=(x^2-x)(x^3+x^2+2x+2)+5x$

2 (1) $P(x)=x^3+2x^2-x+1$

(2) $P(x)=2x^3+9x^2+2x+9$

(3) $P(x)=6x^3+5x^2+13x+1$

［解説］

(1) $P(x)=(x+3)(x^2-x+2)-5$

(2) $P(x)=(x^2+3x-1)(2x+3)-5x+12$

(3) $P(x)=(2x^2+3x+3)(3x-2)+10x+7$

3 (1) 1　(2) 70　(3) 0　(4) 0

［解説］

(1) $(-1)^5-(-1)^3+(-1)^2$

(2) $3^4-2\cdot3^2+7$

(3) $(-1)^{2n}+(-1)^{2n-1}=1-1$

(4) $1^n-1^{n-2}=1-1$

4 (1) $a=1,\ -2,\ 3$　(2) $a=1\pm\sqrt{2}$，$\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

［解説］

(2) $P(x)=\left\{x-\left(1-\sqrt{2}\right)\right\}\left\{x-\left(1+\sqrt{2}\right)\right\}$

$\times\left(x-\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$

10　剰余の定理・因数定理の応用〔P 42～P 45〕

◇確認問題〔P 42～P 43〕

1 (1) $a=-2$　(2) $a=-11$，$b=12$

［解説］

(1) $P(2)=2^3-3\cdot2+a=0$

(2) $P(1)=1^3-2\cdot1^2+a\cdot1+b=0$，

$P(-3) = (-3)^3 - 2 \cdot (-3)^2 + a \cdot (-3) + b = 0$ より

$a + b = 1,\ -3a + b = 45$

2 (1) $3x + 1$　　(2) $4x - 2$

［解説］

(1) 求める余りは $ax + b$ とおける．商を $Q(x)$ とおくと，

$P(x) = (x - 1)(x - 2)Q(x) + ax + b$

剰余の定理により $P(1) = 4$，$P(2) = 7$ だから，

$a + b = 4,\ 2a + b = 7$

(2) 求める余りは $ax + b$ とおける．商を $Q(x)$ とおくと，

$P(x) = (x + 1)(x - 3)Q(x) + ax + b$

剰余の定理により $P(-1) = -6$，$P(3) = 10$ だから，

$-a + b = -6,\ 3a + b = 10$

3 (1) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$　　(2) $(x - 1)(x - 2)(x + 6)$

4 (1)

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & 2 & -4 \\ & & 1 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

$x^3 + x^2 + 2x - 4 = (x - 1)(x^2 + 2x + 4)$

(2)

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ & & -2 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}$$

$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = (x + 2)(x^2 + x + 2) - 2$

◇練成問題Ａ〔Ｐ 44〕

1 (1) $a = -4$　　(2) $a = -3$

(3) $a = -10,\ b = 8$　　(4) $a = -4,\ b = 6$

［解説］

(1) $P(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 1 + a = 0$

(2) $P(-1) = (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 - 3(-1) + 1 = 0$

(3) $P(1) = 1^3 + 1^2 + a \cdot 1 + b = 0$

$P(2) = 2^3 + 2^2 + a \cdot 2 + b = 0$

より　$a + b = -2,\ 2a + b = -12$

(4) $P(-1) = (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + (-1) + b = 0$

$P(3) = 3^3 + a \cdot 3^2 + 3 + b = 0$

より　$a + b = 2,\ 9a + b = -30$

2 (1) $2x + 7$　　(2) $6x - 5$　　(3) $3x + 4$

［解説］

(1) 求める余りは $ax + b$ とおける．商を $Q(x)$ とおくと，

$P(x) = (x + 1)(x - 2)Q(x) + ax + b$

剰余の定理により $P(-1) = 5$，$P(2) = 11$ だから，

$-a + b = 5,\ 2a + b = 11$

(2) 求める余りは $ax + b$ とおける．商を $Q(x)$ とおくと，

$P(x) = (x - 1)(x - 4)Q(x) + ax + b$

剰余の定理により $P(1) = 1$，$P(4) = 19$ だから，

$a + b = 1,\ 4a + b = 19$

(3) 求める余りは $ax + b$ とおける．商を $Q(x)$ とおくと，

$P(x) = (x + 2)(x + 3)Q(x) + ax + b$

剰余の定理により $P(-2) = -2$，$P(-3) = -5$ だから，

$-2a + b = -2,\ -3a + b = -5$

3 (1) $(x - 1)(x - 3)(x + 4)$　　(2) $(x + 1)(x - 2)(x - 4)$

(3) $(x - 2)(x + 3)(x + 5)$

4 (1)

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 4 & -2 \\ & & 1 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x - 1)(x^2 - 2x + 2)$

(2)

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 2 & -7 & -2 \\ & & 2 & 8 & 2 \\ \hline & 1 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

$x^3 + 2x^2 - 7x - 2 = (x - 2)(x^2 + 4x + 1)$

(3)

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 2 & -2 & 4 \\ & & -3 & 3 & -3 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

$x^3 + 2x^2 - 2x + 4 = (x + 3)(x^2 - x + 1) + 1$

◇練成問題Ｂ〔Ｐ 45〕

1 (1) $a = -5,\ b = -3$　　(2) $a = 4,\ b = -4$

(3) $a = 5,\ b = -4$

［解説］

(1) $P(1) = 1^3 + a \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 + b = 0$

$P(2) = 2^3 + a \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 + b = -1$

より　$a + b = -8,\ 4a + b = -23$

(2) $P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + a \cdot 2 + b = 0$

$P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + a \cdot 1 + b = -2$

より　$2a + b = 4,\ a + b = 0$

(3) $P(2) = 2^3 + a \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + b = 30$

$P(-3) = (-3)^3 + a \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3) + b = 5$

より　$4a + b = 16,\ 9a + b = 41$

2 (1) $7x - 11$　　(2) $4x + 3$

［解説］

(1) 求める余りは $ax + b$ とおける．商を $Q(x)$ とおくと，

$P(x) = (x^2 - 6x + 8)Q(x) + ax + b$

$= (x - 2)(x - 4)Q(x) + ax + b$

剰余の定理により $P(2) = 3$，$P(4) = 17$ だから，

$2a + b = 3,\ 4a + b = 17$

(2) 求める余りは $ax + b$ とおける．商を $Q(x)$ とおくと，

$P(x) = (x^2 - 2x - 15)Q(x) + ax + b$

$= (x + 3)(x - 5)Q(x) + ax + b$

剰余の定理により $P(-3) = -9$，$P(5) = 23$ だから，

$-3a + b = -9,\ 5a + b = 23$

3 (1) $a = 7,\ b = -6$　　(2) $a = -4,\ b = 3$

［解説］

(1) 商を $Q(x)$ とおくと

$x^3 + ax^2 + 5x + b$

$= (x^2 - x - 2)Q(x) + 15x + 10$

$= (x + 1)(x - 2)Q(x) + 15x + 10$

両辺に $x = -1$，$x = 2$ を代入して

$(-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) + b = 15 \cdot (-1) + 10$

$2^3 + a \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + b = 15 \cdot 2 + 10$

$\therefore\ a + b = 1,\ 4a + b = 22$

［別解］商は 1 次以下の式だから，$px + q$ とおける．

$x^3 + ax^2 + 5x + b = (x^2 - x - 2)(px + q) + 15x + 10$

が恒等式だから，展開して係数比較．$p = 1$ はすぐにわかるので商は $x + k$ などとおいてもよい．

(2) 商を $Q(x)$ とおくと

$x^3 + 4x^2 + ax + b$

$= (x^2 - x - 6)Q(x) + 7x + 33$

$= (x + 2)(x - 3)Q(x) + 7x + 33$

両辺に $x = -2$，3 を代入して

$(-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 + a \cdot (-2) + b = 7 \cdot (-2) + 33$

$3^3 + 4 \cdot 3^2 + a \cdot 3 + b = 7 \cdot 3 + 33$

$\therefore \quad -2a + b = 11,\ 3a + b = -9$

[別解] 商を $px + q$（または $x + k$）とおけば，(1)と同様の別解がある．

4 (1) 0 (2) $(2x + 1)(x^2 + x + 1)$

[解説]

(1) $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 1$

$= 0$

(2) $P(x)$ は $x + \frac{1}{2}$ で割り切れるから，割り算すると

$P(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 2x + 2)$

11 高次方程式〔P 46～P 51〕

◇確認問題〔P 46～P 49〕

1 (1) $x = \pm 1,\ \pm i$ (2) $x = \pm\sqrt{5},\ \pm i$

[解説]

(1) $x^2 = \pm 1$

(2) $x^2 = -1,\ 5$

2 (1) $x = 1,\ \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$ (2) $x = -1,\ \pm\sqrt{2}\,i$

[解説]

(1) $(x - 1)(x^2 + x - 3) = 0$

(2) $(x + 1)(x^2 + 2) = 0$

3 (1) $x = 1,\ -2,\ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

(2) $x = 1,\ 2,\ \pm i$

[解説]

(1) $(x - 1)(x + 2)(x^2 + x - 1) = 0$

(2) $(x - 1)(x - 2)(x^2 + 1) = 0$

4 (1) 2 重解 (2) 3 重解

5 (1) ω (2) 0

[解説]

(1) $\omega^7 = \omega^{6+1} = (\omega^3)^2\cdot\omega$

(2) $\omega^4 = \omega^{3+1} = \omega$ より，(与式) $= \omega + \omega^2 + 1$

6 (1) $a = 11,\ b = -12$，他の解 $x = -4$

(2) $a = -15,\ b = -18$，他の解 $x = \frac{3}{2}$

(3) $a = -23,\ b = -35$，他の解 $x = -7$, $2+i$

(4) $a = -9,\ b = -40$，他の解 $x = 4$, $1+3i$

[解説]

(1) $f(x) = x^3 + 2x^2 - ax + b$ とおくと

$f(-1) = 0,\ f(3) = 0$ より

$\begin{cases} a + b = -1 \\ 3a - b = 45 \end{cases}$

これより $a = 11,\ b = -12$

よって

$x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = (x + 1)(x - 3)(x + 4)$

(2) $f(x) = 2x^3 - x^2 + ax - b$ とおくと

$f(2) = 0,\ f(-3) = 0$ より

$\begin{cases} 2a - b = -12 \\ 3a + b = -63 \end{cases}$

これより $a = -15,\ b = -18$

よって

$2x^3 - x^2 - 15x + 18 = (x - 2)(x + 3)(2x - 3)$

(3) $2 - i$ を代入して整理すると

$(11 + 2a - b) + (-23 - a)i = 0$

これより $a = -23,\ b = -35$

よって

$x^3 + 3x^2 - 23x + 35 = (x + 7)(x^2 - 4x + 5)$

(4) $1 - 3i$ を代入して整理すると

$\begin{cases} 22 - 2a + b = 0 \\ 54 + 6a = 0 \end{cases}$

これより $a = -9,\ b = -40$

よって

$x^3 - 6x^2 + 18x - 40 = (x - 4)(x^2 - 2x + 10)$

7 (1) 14 (2) -8 (3) $\frac{5}{2}$

[解説]

$\alpha + \beta + \gamma = -2,\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -5,\ \alpha\beta\gamma = -2$

(1) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$= (-2)^2 - 2\cdot(-5) = 14$

(2) $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$

$= \alpha\beta\gamma + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + (\alpha + \beta + \gamma) + 1$

$= -8$

(3) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{5}{2}$

◇練成問題A〔P 50〕

1 (1) $x = \pm 2,\ \pm 2i$ (2) $x = \pm\sqrt{3},\ \pm\sqrt{2}\,i$

(3) $x = \pm 1,\ \pm\sqrt{3}\,i$

[解説]

(1) $x^2 = \pm 4$

(2) $x^2 = 3,\ -2$

(3) $x^2 = 1,\ -3$

2 (1) $x = 1,\ -1 \pm \sqrt{3}$ (2) $x = 2,\ -1,\ -5$

(3) $x = 1,\ \frac{1 \pm \sqrt{7}\,i}{2}$ (4) $x = 2,\ -1 \pm i$

[解説]

(1) $(x - 1)(x^2 + 2x - 2) = 0$

(2) $(x + 1)(x - 2)(x + 5) = 0$

(3) $(x - 1)(x^2 - x + 2) = 0$

(4) $(x - 2)(x^2 + 2x + 2) = 0$

3 (1) $x = -2,\ 1,\ -1 \pm \sqrt{2}$ (2) $x = \pm 1,\ -2,\ 3$

(3) $x = -1,\ 2,\ 1 \pm \sqrt{3}\,i$ (4) $x = 1,\ -3,\ \pm 2i$

[解説]

(1) $(x - 1)(x + 2)(x^2 + 2x - 1) = 0$

(2) $(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 2) = 0$

(3) $(x + 1)(x - 2)(x^2 - 2x + 4) = 0$

(4) $(x - 1)(x + 3)(x^2 + 4) = 0$

4 (1) 2 重解 (2) 2 重解 (3) 3 重解

5 (1) $x = 1,\ 2$ (2) $x = 2,\ -3$

[解説]

(1) $(x - 1)^2(x - 2) = 0$

(2) $(x - 2)^2(x + 3) = 0$

6 (1) ω^2 (2) 1 (3) 0 (4) -1 (5) -1

[解説]

(1) $\omega^{20} = \omega^{18+2} = (\omega^3)^6 \cdot \omega^2$

(2) $\omega^{99} = (\omega^3)^{33}$

(3) $\omega^8 + \omega^4 + 1 = \omega^{6+2} + \omega^{3+1} + 1 = \omega^2 + \omega + 1$

(4) $\omega^7 + \omega^2 = \omega^{6+1} + \omega^2 = \omega + \omega^2 = \omega + (-\omega - 1)$

(5) $\omega^{50} + \omega^{25} = \omega^{48+2} + \omega^{24+1} = (\omega^3)^{16} \cdot \omega^2 + (\omega^3)^8 \cdot \omega$
$= \omega^2 + \omega$

7 (1) $a = \frac{5}{2}$, $b = 6$, 他の解 $x = 3$

(2) $a = 13$, $b = 0$, 他の解 $x = 0$

［解説］

(1) $x = 1$ を代入して　$2a - b = -1$　……　①
$x = -2$ を代入して　$4a + b = 16$　……　②
①，②より　$a = \frac{5}{2}$, $b = 6$
このときもとの3次式は
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$
$(x - 1)(x + 2)(x - 3) = 0$

(2) $x = 2 - 3i$ を代入して
$(-26 + 2a + 3b) - 3(a - 13)i = 0$

$$\begin{cases} 2a + 3b = 26 & \cdots\cdots ① \\ a - 13 = 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①，②より　$a = 13$, $b = 0$
このときもとの3次式は
$x^3 - 4x^2 + 13x = 0$
$x(x^2 - 4x + 13) = 0$

◇練成問題B〔P 51〕

1 (1) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

(2) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}\,i}{2}$, $\frac{1 \pm \sqrt{7}\,i}{2}$

［解説］

(1) $x^4 - 3x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 - x^2$
$= (x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$

(2) $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2 - x^2$
$= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)$

2 (1) $P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} - 3 = 0$

(2) $x = \frac{1}{2}$, $-1 \pm \sqrt{2}\,i$

［解説］

(2) $P(x)$ は $x - \frac{1}{2}$ で割り切れる.
$P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 4x + 6)$
$= (2x - 1)(x^2 + 2x + 3)$

3 (1) 2　　(2) 2cm

［解説］

(1) 求める自然数を x とおくと，$x^3 = 3x + 2$
$x^3 - 3x - 2 = 0$, $(x + 1)^2(x - 2) = 0$
x は自然数ゆえ $x = -1$ は不適.

(2) 1辺 $x$cm の正方形を切り取るとすれば，求める条件は
$(16 - 2x) \cdot (10 - 2x) \cdot x = 144$
$x^3 - 13x^2 + 40x - 36 = 0$, $(x - 2)^2(x - 9) = 0$
$0 < x < 5$ より，$x = 2$

4 (1) $(\omega^2)^3 = \omega^6 = (\omega^3)^2 = 1^2 = 1$ ゆえ，ω^2 は $x^3 - 1 = 0$ の解である.

(2) $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ だから，ω は $x^2 + x + 1 = 0$ の解である．$\omega^2 = 1$ ではないから，ω^2 も $x^2 + x + 1 = 0$ の解である．$\omega = \omega^2$ とすると，$\omega = 0, 1$ となり矛盾するから，ω と ω^2 は異なる．従って ω，ω^2 が $x^2 + x + 1 = 0$ の2つの解である.

以上から $x^3 - 1 = 0$ の解は1，ω，ω^2 である.

5 (1) $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ より，$\omega^2 = -\omega - 1$
$\omega^3 = \omega^2 \cdot \omega = (-\omega - 1) \cdot \omega = -\omega^2 - \omega$
$= -(-\omega - 1) - \omega = 1$
［別解：$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ を使う］

(2) 解と係数の関係から，$\omega\omega' = 1 = \omega^3$
$\omega \neq 0$ だから，両辺を ω で割れば，$\omega' = \omega^2$

12　恒等式〔P 52～P 57〕

◇確認問題〔P 52～P 54〕

1 (1) $f(3) = -3^2 + 4 \cdot 3 + 3 = 6$
$f(-3) = -(-3)^2 + 4 \cdot (-3) + 3 = -18$
$f(a) = -a^2 + 4a + 3$

(2) $f(1) = 2 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 = 0$
$f(-2) = 2 \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 1 = -39$
$f(b) = 2b^3 - 4b^2 + 3b - 1$

(3) $g(2) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 4$
$g(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 2 = 16$
$g(-a) = 2 \cdot (-a)^2 - 3 \cdot (-a) + 2 = 2a^2 + 3a + 2$

2 (1) $a = 2$, $b = 6$, $c = -3$　　(2) $a = 2$, $b = 0$, $c = 3$

(3) $a = 2$, $b = 8$, $c = 8$　　(4) $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$

(5) $a = -1$, $b = -2$, $c = -2$

(6) $a = -\frac{1}{2}$, $b = -1$, $c = \frac{3}{2}$

［解説］

(2) $ax^2 + (2a + b)x + (a + b + c) = 2x^2 + 4x + 5$

(3) $ax^2 + (-4a + b)x + (4a - 2b + c) = 2x^2$

(4) $(a + b)x^2 + (-2a + 2b)x + (a + b + c)$
$= 3x^2 - 2x + 4$

(5) $2a - b = 0$, $b - c = 0$, $c - a + 1 = 0$

(6) $(a + b + c)x^2 + (-a + c)x - b = 2x + 1$

3 (1) $a = 2$, $b = 1$　　(2) $a = 3$, $b = 2$

(3) $a = 5$, $b = -1$

［解説］

(1) 両辺に $(x - 1)(2x - 3)$ をかけて
$5x - 7 = a(2x - 3) + b(x - 1)$

(2) 両辺に $(2x - 1)(x - 3)$ をかけて
$-x - 7 = a(x - 3) - b(2x - 1)$

(3) 両辺に $(3x - 2)(2x - 1)$ をかけて
$7x - 3 = a(2x - 1) + b(3x - 2)$

◇練成問題A〔P 55～P 56〕

1 (1) $f(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 5 = 13$
$f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 5 = 10$
$f(a) = 3a^2 - 2a + 5$

(2) $f(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 3 = 18$
$f(-2) = (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 3 = -27$
$f(b) = b^3 - 2b^2 + 4b - 3$

(3) $g(2) = -2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = -3$

$g(-1) = -2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 3 = -9$

$g(-a) = -2 \cdot (-a)^2 + 4 \cdot (-a) - 3 = -2a^2 - 4a - 3$

(4) $g(2) = 4 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 6 = 14$

$g(-3) = 4 \cdot (-3)^3 - 5 \cdot (-3)^2 - 2 \cdot (-3) + 6 = -141$

$g(-b) = 4 \cdot (-b)^3 - 5 \cdot (-b)^2 - 2 \cdot (-b) + 6$

$= -4b^3 - 5b^2 + 2b + 6$

(5) $f(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 2 = 0$

$f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 2 = 18$

2 (1) $a = 2,\ b = 3$　(2) $a = 2,\ b = 2,\ c = 3$

(3) $a = 2,\ b = 0$　(4) $a = 3,\ b = 0$

(5) $a = 5,\ b = 1,\ c = 4$　(6) $a = 1,\ b = 4,\ c = 4$

(7) $a = -1,\ b = 2,\ c = 5$　(8) $a = 8,\ b = 4,\ c = 2$

(9) $a = 1,\ b = 1,\ c = -6$　(10) $a = 2,\ b = -1,\ c = 3$

(11) $a = 1,\ b = -2,\ c = 1$　(12) $a = 2,\ b = 2,\ c = -13$

(13) $a = -3,\ b = \frac{4}{3}$

［解説］

(3) $(a + b)x + (-2a + 3b + 2) = 2x - 2$

(4) $ax + (-a + 3) = (3 + b)x - 2b$

(5) $a - 2 = 3,\ b = 2b - 1,\ c = 4$

(6) $2a + 1 = 3,\ 3 = b - 1,\ b = c$

(7) $2a = -b,\ 5 = c,\ 2b = a + c$

(9) $ax^2 + (-4a + b)x + (4a - 2b + c) = x^2 - 3x - 4$

(10) $ax^2 + (2a + b)x + (a + b + c) = 2x^2 + 3x + 4$

(11) $ax^2 + (2a + b)x + (a + b + c) = x^2$

(12) $(a + b)x^2 + (-4a + 4b)x + (4a + 4b + c) = 4x^2 + 3$

(13) $x^2 + (-2 + a)x + (ab + 2) = x^2 - 5x - 2$

3 (1) $a = 2,\ b = 1$　(2) $a = 1,\ b = 3$

(3) $a = 1,\ b = 5$　(4) $a = 2,\ b = 2$

［解説］

(1) 両辺に $(2x - 1)(x - 2)$ をかけて

$-3 = a(x - 2) - b(2x - 1)$

(2) 両辺に $(x - 4)(3x - 5)$ をかけて

$7 = a(3x - 5) - b(x - 4)$

(3) 両辺に $(x - 5)(3x - 4)$ をかけて

$8x - 29 = a(3x - 4) + b(x - 5)$

(4) 両辺に $(x - 6)(3x - 2)$ をかけて

$4x + 8 = a(3x - 2) - b(x - 6)$

◇練成問題B〔P 57〕

1 (1) $a = 0,\ b = 1$　(2) $a = 0,\ b = 0$　(3) $a = 2,\ b = 3$

［解説］

(1) $x^3 - 6x^2 + 13x - 4$

$= x^3 + (a - 6)x^2 + (-4a + b + 12)x + (4a - 2b - 2)$

(2) $x^3 + ax^2 + 4x - 5 = x^3 + (4 + b)x - 5$

(3) $x^3 + 5x^2 + 7x - 4$

$= x^3 + (a + 3)x^2 + (a + b + 2)x - 4$

2 (1) $a = 10,\ b = 2,\ c = -10$

(2) $a = -2,\ b = \frac{4}{3},\ c = \frac{2}{3}$

(3) $a = 5,\ b = 0,\ c = -5$

［解説］

(1) $x = 1,\ 2,\ 3$ を代入．

(2) $x = 0,\ -1,\ 2$ を代入．

(3) $x = 0,\ -1,\ 1$ を代入．

3 (1) $a = 6,\ b = 11,\ c = 6$

(2) $a = 1,\ b = 7,\ c = 6,\ d = 1$

(3) $a = 28,\ b = -\frac{5}{2},\ c = 19,\ d = -\frac{87}{2}$

［解説］

(1) $x = 1,\ 2,\ 3$ を代入．

(2) $x = 1,\ 2,\ 3$ を代入．また3次の係数を比較すると $d = 1$

(3) $x = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ を代入．

4 $a = 1,\ b = -15,\ c = 25,\ d = -10,\ e = 1$

［解説］

$x = 0,\ -1,\ -2,\ -3$ を代入．また4次の係数を比較すると $e = 1$

5 (1) $x = -\frac{8}{5},\ y = -\frac{6}{5}$　(2) $x = -5,\ y = 9$

［解説］

(1) $(2x - y + 2)k + (x + 2y + 4) = 0$

$\therefore\ 2x - y + 2 = 0,\ x + 2y + 4 = 0$

(2) $(x + y - 4)k - (2x + y + 1) = 0$

$\therefore\ x + y - 4 = 0,\ 2x + y + 1 = 0$

13　等式の証明〔P 58～P 61〕

◇確認問題〔P 58～P 59〕

1 (1) 左辺 $= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = 2(a^2 + b^2)$

$=$ 右辺

(2) 左辺 $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)$

$= 6a^2b + 2b^3 = 2b(3a^2 + b^2) =$ 右辺

(3) 左辺 $= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

$= \{(a^2 + b^2) + ab\}\{(a^2 + b^2) - ab\}$

$= (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 = a^4 + a^2b^2 + b^4 =$ 右辺

(4) 左辺 $= (3a + 4b)^2 + (2a - 6b)^2$

$= 9a^2 + 24ab + 16b^2 + 4a^2 - 24ab + 36b^2$

$= 13a^2 + 52b^2$

右辺 $= (3a - 4b)^2 + (2a + 6b)^2$

$= 9a^2 - 24ab + 16b^2 + 4a^2 + 24ab + 36b^2$

$= 13a^2 + 52b^2$

2 (1) 左辺－右辺 $= 2c^2 + ab - (a - c)(b - c)$

$= c^2 + ac + bc = c(a + b + c) = 0$

(2) $c = -a - b$ より

$a^2 - bc = a^2 + b(a + b) = a^2 + ab + b^2$

$b^2 - ca = b^2 + a(a + b) = a^2 + ab + b^2$

$c^2 - ab = (a + b)^2 - ab = a^2 + ab + b^2$

よって　$a^2 - bc = b^2 - ca = c^2 - ab$

(3) $c = -a - b$ より

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a^3 + b^3 - (a + b)^3 + 3ab(a + b) = 0$

3 (1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ とおくと，$a = bk,\ c = dk$

① 左辺 $= \frac{a + b}{a} = \frac{bk + b}{bk} = \frac{k + 1}{k}$

右辺 $= \frac{c + d}{c} = \frac{dk + d}{dk} = \frac{k + 1}{k}$

② 左辺 $= (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) = (b^2k^2 + d^2k^2)(b^2 + d^2)$

$= k^2(b^2 + d^2)^2$

右辺 $= (ab + cd)^2 = (b^2k + d^2k)^2 = k^2(b^2 + d^2)^2$